Gemeinsame Abituraufgabenpools der Länder

Pool für das Jahr 2018

Aufgaben für das Fach Mathematik

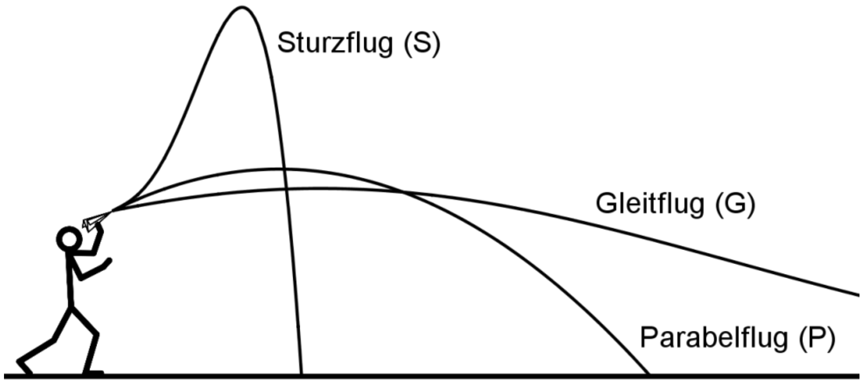
Kurzbeschreibung

Anforderungsniveau	Prüfungsteil	Sachgebiet	digitales Hilfsmittel
grundlegend	B	Analysis	CAS

1 Aufgabe

BE

Papierflieger verlassen die Hand eines Werfers in einer bestimmten Abwurfhöhe, unter einem bestimmten Abwurfwinkel und mit einer bestimmten Anfangsgeschwindigkeit. Die Flugkurven können abhängig von diesen drei Bedingungen sowie von der jeweiligen Bauweise des Papierfliegers unterschiedlich verlaufen. Im Folgenden sollen drei Typen von Flugkurven unterschieden werden, die in der Abbildung schematisch dargestellt sind.



Wird die Größe der betrachteten Papierflieger vernachlässigt, können die Flugkurven bei Verwendung eines Koordinatensystems, dessen x-Achse entlang des horizontalen Bodens und dessen y-Achse durch den Abwurfpunkt verläuft, modellhaft mithilfe von Funktionen beschrieben werden. Im Folgenden soll der x-Wert der horizontalen Entfernung des Papierfliegers vom Abwurfpunkt entsprechen, der zugehörige Funktionswert der Flughöhe (jeweils in Metern).

1 Ein Papierflieger bewegt sich entlang einer Flugkurve vom Typ S. Diese kann mithilfe der in $\mathbb{R}$ definierten Funktion s mit $s(x) = -x^4 + 2x^3 + \frac{1}{2}x + 2$ beschrieben werden.

a Geben Sie die Abwurfhöhe an und zeigen Sie, dass die Flugweite etwa 2,27 m beträgt. 3

b Zeigen Sie, dass der Papierflieger seine maximale Flughöhe besitzt, wenn seine horizontale Entfernung vom Abwurfpunkt etwa 1,55 m beträgt. Geben Sie diese Flughöhe an. 3

c Berechnen Sie die Koordinaten der beiden Wendepunkte des Graphen von s und geben Sie die jeweilige Steigung des Graphen von s in den Wendepunkten an. 4

d Beschreiben Sie die Bedeutung des Wendepunkts mit der größeren x-Koordinate im Hinblick auf die Steigung der Flugkurve des Papierfliegers. 2

2 Im Folgenden wird ein Papierflieger betrachtet, der sich bei jedem Flug entlang einer Flugkurve vom Typ P bewegt. Er wird in 2 m Höhe abgeworfen und erreicht seine größte Höhe in einer horizontalen Entfernung von 2 m vom Abwurfpunkt. Seine möglichen Flugkurven lassen sich näherungsweise mithilfe ganzrationaler Funktionen zweiten Grades beschreiben.

a Begründen Sie, dass die möglichen Flugkurven dieses Papierfliegers im Modell durch den Punkt $(4|2)$ verlaufen. 2

b Zeigen Sie, dass sich alle möglichen Flugkurven dieses Papierfliegers im Modell mithilfe der in $\mathbb{R}$ definierten Funktionen p_k mit $p_k(x) = -0{,}25k \cdot x^2 + k \cdot x + 2$ und $k \in \mathbb{R}^+$ beschreiben lassen. 5

c Ermitteln Sie denjenigen Wert von k, für den der Papierflieger eine Flugweite von 6 m hat. Skizzieren Sie die Graphen der Funktionen $p_{\frac{1}{4}}$ und $p_{\frac{2}{3}}$. 4

d Ist ein Kurvenstück Graph einer in $[a;b]$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ definierten Funktion h mit erster Ableitungsfunktion h', so gilt für die Länge L dieses Kurvenstücks: 4

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + \left(h'(x)\right)^2}\,dx$$

Untersuchen Sie rechnerisch, ob $p_{\frac{1}{4}}$ oder $p_{\frac{2}{3}}$ die längere Flugkurve beschreibt.

e Bestimmen Sie den Wert von k so, dass der Abwurfwinkel der mithilfe von p_k beschriebenen Flugkurve ebenso groß ist wie der Abwurfwinkel der mithilfe der Funktion s beschriebenen Flugkurve. 3

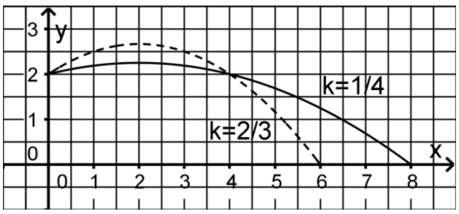
3 Die größten Flugweiten erzielen Papierflieger mit Flugkurven des Typs G. Eine solche Flugkurve soll mithilfe der in $\mathbb{R}$ definierten Funktion g mit $g(x) = 2e^{-0{,}02x^2 + 0{,}1x}$ beschrieben werden.

a Beurteilen Sie die Eignung von g zur modellhaften Beschreibung der Flugkurve bezogen auf den Verlauf des Graphen von g für $x \to \infty$. 3

b Die Flugweite beträgt 15,3 m. Der erste Teil der Flugkurve lässt sich mithilfe von g beschreiben. Ab einem bestimmten Punkt kann der weitere Verlauf der Flugkurve bis zum Boden durch eine Gerade dargestellt werden. Dieser zweite Teil der Flugkurve hat eine Länge von 10,6 m. Bestimmen Sie die horizontale Entfernung des Übergangs vom ersten zum zweiten Teil der Flugkurve vom Abwurfpunkt und prüfen Sie, ob dieser Übergang ohne Knick erfolgt.	7
	40

2 Erwartungshorizont

Der Erwartungshorizont stellt für jede Teilaufgabe dar, in welchem Umfang und in welcher Form eine Lösung erwartet wird; nicht alle Lösungen sind dazu vollständig ausgeführt. Nicht dargestellte korrekte Lösungen sind als gleichwertig zu akzeptieren.

			BE
1	**a**	$s(0)=2$, d. h. die Abwurfhöhe beträgt 2 m. Für $x>0$ liefert $s(x)=0$: $x\approx 2,27$ Die Flugweite beträgt etwa 2,27 m.	3
	b	$s'(x)=0$ liefert $x=c$ mit $c\approx 1,55$. Es gilt $s(c)\approx 4,45$, d. h. die maximale Flughöhe beträgt etwa 4,45 m.	3
	c	$s''(x)=0 \Leftrightarrow x=0 \vee x=1$ Wendepunkt 1: $x=0$, $y=2$ Wendepunkt 2: $x=1$, $y=3,5$ Steigungen: $s'(0)=0,5$ und $s'(1)=2,5$	4
	d	Der Wendepunkt mit der größeren x-Koordinate stellt den Punkt dar, in dem die Steigung der Flugkurve gegenüber dem Boden am größten ist.	2
2	**a**	Die Graphen, die die Flugkurven beschreiben, sind Parabeln, die durch den Punkt $(0\mid 2)$ verlaufen und symmetrisch bezüglich der Gerade mit der Gleichung $x=2$ sind. Damit enthalten sie auch den Punkt $(4\mid 2)$.	2
	b	$p_k(x)=i\cdot x^2+k\cdot x+j$ $p_k(0)=2 \Leftrightarrow j=2$, $p_k'(2)=0 \Leftrightarrow i=-0,25k$	5
	c	$p_k(6)=0 \Leftrightarrow k=\frac{2}{3}$ 	4

	d	$\int_0^8 \sqrt{1+\left(p'_{\frac{1}{4}}(x)\right)^2}\,dx \approx 8{,}5$ $\int_0^6 \sqrt{1+\left(p'_{\frac{2}{3}}(x)\right)^2}\,dx \approx 7{,}1$ Damit beschreibt $p_{\frac{1}{4}}$ die längere Flugkurve.	4
	e	$p'_k(0) = s'(0) \Leftrightarrow k = \frac{1}{2}$	3
3	**a**	Der Graph von g nähert sich für $x \to \infty$ der x-Achse an, berührt diese jedoch nicht. Da der Papierflieger irgendwann auf den Boden trifft, ist das Modell zur Beschreibung der Flugkurve nur eingeschränkt geeignet.	3
	b	Für $x \leq 15{,}3$ liefert $(15{,}3-x)^2 + g(x)^2 = 10{,}6^2$: $x \approx 4{,}89$ Die Entfernung des Übergangs vom ersten zum zweiten Teil der Flugkurve von der Abwurfstelle beträgt etwa 4,89 m. $g'(4{,}89) \approx -0{,}19$ $\frac{-g(4{,}89)}{15{,}3-4{,}89} \approx -0{,}19$ Der Übergang erfolgt näherungsweise ohne Knick.	7
			40

3 Standardbezug

Teil-aufg.	BE	Leitideen					allgemeine mathematische Kompetenzen[1]						Anforderungs-bereich		
		L1	L2	L3	L4	L5	K1	K2	K3	K4	K5	K6	I	II	III
1 a	3	X			X				I		I		X		
b	3	X			X				I		I		X		
c	4	X	X		X						I		X		
d	2			X	X				II			I		X	
2 a	2			X	X		II		I			II		X	
b	5	X			X		II	II	II					X	
c	4	X			X				I	I	I		X		
d	4		X		X					II	II	II		X	
e	3	X		X	X			II	I		I			X	
3 a	3	X		X	X		II		III			II			X
b	7	X	X	X	X			III	III		II				X

[1] Für jede Kompetenz, die bei der Bearbeitung der Teilaufgabe eine wesentliche Rolle spielt, ist der Anforderungsbereich (I, II oder III) eingetragen, in dem die Kompetenz benötigt wird.

4 Bewertungshinweise

Die Bewertung der erbrachten Prüfungsleistungen hat sich für jede Teilaufgabe nach der am rechten Rand der Aufgabenstellung angegebenen Anzahl maximal erreichbarer Bewertungseinheiten (BE) zu richten.

Für die Bewertung der Gesamtleistung eines Prüflings ist passend zur Konzeption der Aufgaben der Aufgabensammlung und des Abituraufgabenpools ein Bewertungsraster[2] vorgesehen, das angibt, wie die in den Prüfungsteilen A und B insgesamt erreichten Bewertungseinheiten in Notenpunkte umgesetzt werden.

[2] Das Bewertungsraster ist Teil des Dokuments „Beschreibung der Struktur“, das auf den Internetseiten des IQB zum Download bereitsteht.