

Gemeinsame Abituraufgabenpools der Länder

Pool für das Jahr 2018

Aufgaben für das Fach Mathematik

Kurzbeschreibung

Anforderungsniveau	Prüfungsteil	Sachgebiet ¹	digitales Hilfsmittel
erhöht	B	AG/LA (A1)	CAS

1 Aufgabe

Sogenannte Tauflieden leben mehrere Wochen. Eine fertig entwickelte Fliege (im Folgenden als „Vollinsekt“ bezeichnet) legt wöchentlich bis zu 400 Eier. Innerhalb der ersten Woche nach dem Legen eines Eis entsteht über mehrere Larvenstadien eine Puppe, innerhalb der zweiten aus dieser Puppe ein Vollinsekt.

Betrachtet wird die Entwicklung verschiedener Populationen weiblicher Tiere, die jeweils unter Laborbedingungen abgeschlossen gezüchtet werden. In einem Modell wird die

Zusammensetzung einer Population durch einen Vektor $\begin{pmatrix} E \\ P \\ V \end{pmatrix}$ beschrieben, wobei E die

Anzahl der Eier, aus denen weibliche Larven schlüpfen können, P die Anzahl der Puppen und V die Anzahl der Vollinsekten bezeichnet.

1 Zu Beginn der Beobachtung einer Fliegenpopulation besteht diese nur aus 230 Vollinsekten. Die Entwicklung der Population von einer Woche n zur nächsten kann durch

die Matrix $L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 200 \\ 0,03 & 0 & 0 \\ 0 & 0,11 & 0,7 \end{pmatrix}$ und die Gleichung $\overline{v}_{n+1} = L \cdot \overline{v}_n$ beschrieben werden.

den.

a Beschreiben Sie die Bedeutung der Matrixeinträge 200 und 0,11 im Sachzusammenhang.

BE

2

¹ verwendete Abkürzungen: AG/LA (A1) - Analytische Geometrie/Lineare Algebra (Alternative A1),
AG/LA (A2) - Analytische Geometrie/Lineare Algebra (Alternative A2)

- b** Zeigen Sie, dass sechs Wochen nach Beobachtungsbeginn etwa 336 Vollinsekten und zehn Wochen nach Beobachtungsbeginn etwa 652 Vollinsekten zur Population gehören. 2
- c** Es wird vermutet, dass die Anzahl der Vollinsekten ab dem Zeitpunkt sechs Wochen nach Beobachtungsbeginn innerhalb von jeweils vier Wochen um etwa 92 % zunimmt. Zeigen Sie, dass diese Vermutung zwischen den Zeitpunkten sechs und zehn Wochen nach Beobachtungsbeginn sowie zwischen den Zeitpunkten zehn und vierzehn Wochen nach Beobachtungsbeginn näherungsweise zutrifft. Bestimmen Sie passend zur Vermutung die durchschnittliche wöchentliche Zunahme der Anzahl der Vollinsekten in Prozent. 5
- 2** Einer zweiten Population soll am Ende jeder Woche eine bestimmte Anzahl a von Vollinsekten entnommen werden. Die Entwicklung dieser Population von einer Woche n zur nächsten kann damit durch die Matrix L aus Aufgabe 1 und die Gleichung $\vec{v}_{n+1} = L \cdot \vec{v}_n - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ a \end{pmatrix}$ beschrieben werden.
- a** Angenommen, die Population bestünde zu Beginn der Beobachtung nur aus 4000 Puppen. Bestimmen Sie die Zusammensetzung der Population zwei Wochen nach Beobachtungsbeginn, wenn man ihr am Ende jeder Woche 10 Vollinsekten entnimmt. 2
- b** Beurteilen Sie die folgende Aussage: 3
- Entnimmt man der Population während eines Zeitraums von fünf Wochen am Ende jeder Woche 10 Vollinsekten, so führt dies zur gleichen Zusammensetzung, wie wenn erst nach Ablauf des gesamten Zeitraums 50 Vollinsekten entnommen werden.*
- c** Zur Population sollen dauerhaft 20000 Eier und 600 Puppen gehören. Bestimmen Sie die Anzahl der Vollinsekten in der Population und die Anzahl der Vollinsekten, die am Ende jeder Woche entnommen werden müssen. 3
- 3** Die Entwicklung einer dritten Population von einer Woche n zur nächsten kann durch die Matrix $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 100 \\ 0,09 & 0 & 0 \\ 0 & 0,15 & 0,9 \end{pmatrix}$ und die Gleichung $\vec{v}_{n+1} = M \cdot \vec{v}_n$ beschrieben werden. 4
- a** Es gibt Zusammensetzungen dieser Population, die jeweils die drei folgenden Eigenschaften haben:
- ◆ Die Anzahl der Eier und die Anzahl der Vollinsekten stehen im Verhältnis $b : 1$.
 - ◆ Die Anzahl der Puppen ist viermal so groß wie die Anzahl der Vollinsekten.
 - ◆ Die Anzahl der Eier, Puppen und Vollinsekten wächst von einer Woche zur nächsten jeweils mit einem konstanten Faktor c .
- Bestimmen Sie die Werte von b und c .

- b** Zu Forschungszwecken wird bei dieser Population ein Insektizid eingesetzt. Es bewirkt, dass von einer Woche zur nächsten stets alle Vollinsekten sterben. Die Überlebenschancen der Eier und Puppen sowie die Fruchtbarkeit der Vollinsekten werden durch das Insektizid aber nicht beeinflusst. Beurteilen Sie die folgende Aussage:

4

Betrachtet man die Entwicklung der Population im Rhythmus von drei Wochen, so steigen die Anzahl der Eier, die Anzahl der Puppen und die Anzahl der Vollinsekten jeweils exponentiell an.

25

2 Erwartungshorizont

Der Erwartungshorizont stellt für jede Teilaufgabe dar, in welchem Umfang und in welcher Form eine Lösung erwartet wird; nicht alle Lösungen sind dazu vollständig ausgeführt. Nicht dargestellte korrekte Lösungen sind als gleichwertig zu akzeptieren.

		BE
1 a	Ein Vollinsekt legt wöchentlich 200 Eier, aus denen weibliche Larven schlüpfen können. 11 % der Puppen entwickeln sich zu Vollinsekten.	2
b	$\vec{v}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 230 \end{pmatrix}, \vec{v}_6 = L^6 \cdot \vec{v}_0 \approx \begin{pmatrix} E_6 \\ P_6 \\ 336 \end{pmatrix}, \vec{v}_{10} = L^{10} \cdot \vec{v}_0 \approx \begin{pmatrix} E_{10} \\ P_{10} \\ 652 \end{pmatrix}$	2
c	$\vec{v}_{14} = L^{14} \cdot \vec{v}_0 \approx \begin{pmatrix} E_{14} \\ P_{14} \\ 1241 \end{pmatrix}, \frac{652}{336} \approx 1,94, \frac{1241}{652} \approx 1,90$ <p>Beide Werte entsprechen jeweils näherungsweise einer Zunahme von etwa 92 %.</p> <p>$k = \sqrt[4]{1,92} \approx 1,18$, d. h. die Anzahl nimmt wöchentlich um etwa 18 % zu.</p>	5
2 a	$\vec{v}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 4000 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{v}_1 = L \cdot \vec{v}_0 - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 430 \end{pmatrix}, \vec{v}_2 = L \cdot \vec{v}_1 - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 86000 \\ 0 \\ 291 \end{pmatrix}$	2
b	Die Aussage ist falsch. Begründung: Werden der Population erst nach Ablauf des Zeitraums Vollinsekten entnommen, so kann sie sich vorher ungestört gemäß der Matrix L entwickeln. Bei einer wöchentlichen Entnahme dagegen können die entnommenen Tiere nicht mehr zur Vermehrung beitragen, sodass die Population am Ende des gesamten Zeitraums weniger Eier, Puppen und Vollinsekten enthalten wird.	3
c	$L \cdot \begin{pmatrix} 20000 \\ 600 \\ V \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20000 \\ 600 \\ V \end{pmatrix} \Leftrightarrow V = 100 \wedge a = 36$	3

3	a	$M \cdot \begin{pmatrix} b \cdot x \\ 4 \cdot x \\ x \end{pmatrix} = c \cdot \begin{pmatrix} b \cdot x \\ 4 \cdot x \\ x \end{pmatrix} \Leftrightarrow b = \frac{200}{3} \wedge c = 1,5$	4
	b	Die Aussage ist richtig. Begründung: Die Entwicklung der Population von einer Woche n zur nächsten kann mithilfe der Matrix $N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 100 \\ 0,09 & 0 & 0 \\ 0 & 0,15 & 0 \end{pmatrix}$ beschrieben werden. Es gilt $N^{3x} \cdot \overline{v}_n = 1,35^x \cdot \overline{v}_n.$	4
			25

3 Standardbezug

Teilaufgabe	BE	allgemeine mathematische Kompetenzen ²						Anforderungsbereich		
		K1	K2	K3	K4	K5	K6	I	II	III
1 a	2			I	I		I	X		
b	2					I		X		
c	5		II			II	II		X	
2 a	2					I	I	X		
b	3	III					II			X
c	3		II	II		II			X	
3 a	4		III	III		II				X
b	4	II		II		II			X	

4 Bewertungshinweise

Die Bewertung der erbrachten Prüfungsleistungen hat sich für jede Teilaufgabe nach der am rechten Rand der Aufgabenstellung angegebenen Anzahl maximal erreichbarer Bewertungseinheiten (BE) zu richten.

Für die Bewertung der Gesamtleistung eines Prüflings ist ein Bewertungsraster³ vorgesehen, das angibt, wie die in den Prüfungsteilen A und B insgesamt erreichten Bewertungseinheiten in Notenpunkte umgesetzt werden.

² Für jede Kompetenz, die bei der Bearbeitung der Teilaufgabe eine wesentliche Rolle spielt, ist der Anforderungsbereich (I, II oder III) eingetragen, in dem die Kompetenz benötigt wird.

³ Das Bewertungsraster ist Teil des Dokuments „Beschreibung der Struktur“, das auf den Internetseiten des IQB zum Download bereitsteht.