

Gemeinsame Abituraufgabenpools der Länder

Pool für das Jahr 2018

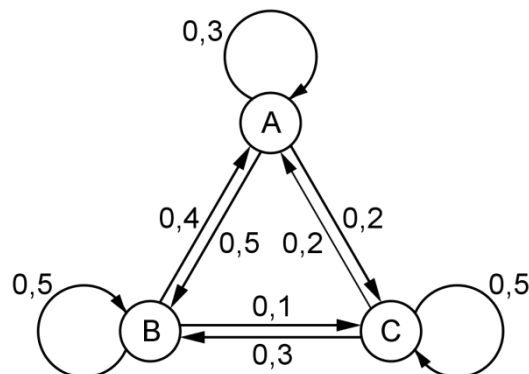
Aufgaben für das Fach Mathematik

Kurzbeschreibung

Anforderungsniveau	Prüfungsteil	Sachgebiet ¹	digitales Hilfsmittel
erhöht	B	AG/LA (A1)	CAS

1 Aufgabe

In einer Stadt gab es lange Zeit nur die beiden Baumärkte A und B. Nach Eröffnung eines dritten Baumarkts C lässt sich das Wechselverhalten der Kunden von einem Monat zum nächsten zunächst modellhaft durch das abgebildete Übergangendiagramm darstellen.



- a** In einem Monat hat der Baumarkt A 3500 Kunden, der Baumarkt B 4840 Kunden und der Baumarkt C 1660 Kunden. Bestimmen Sie für den vorhergehenden Monat die Anzahlen der Kunden der drei Baumärkte.

Um der zunehmenden Konkurrenz durch den Baumarkt C zu begegnen, erweitert der Baumarkt A sein Sortiment, der Baumarkt B verbessert seinen Kundenservice. Diese Maßnahmen führen zu einer Änderung des Wechselverhaltens der Kunden.

Im Modell werden die Verteilungen der Kunden auf die drei Baumärkte durch Vektoren

der Form $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ dargestellt, wobei a die Anzahl der Kunden des Baumarkts A, b die An-

BE

3

¹ verwendete Abkürzungen: AG/LA (A1) - Analytische Geometrie/Lineare Algebra (Alternative A1),
AG/LA (A2) - Analytische Geometrie/Lineare Algebra (Alternative A2)

zahl der Kunden des Baumarkts B und c die Anzahl der Kunden des Baumarkts C bezeichnet. Damit kann die Entwicklung der Kundenverteilung von einem Monat n zum

nächsten nun durch die Matrix $M = \begin{pmatrix} 0,63 & 0,18 & 0,3 \\ 0,27 & 0,72 & 0,45 \\ 0,1 & 0,1 & 0,25 \end{pmatrix}$ und die Gleichung $M \cdot \vec{v}_n = \vec{v}_{n+1}$

beschrieben werden.

In einem auf die Maßnahmen folgenden Sommermonat hat der Baumarkt A 3539 Kunden, der Baumarkt B 5281 Kunden und der Baumarkt C 1180 Kunden.

- b** Weisen Sie nach, dass die beschriebenen Maßnahmen der Baumärkte A und B höchstens vier Monate zurückliegen. 3
- c** Berechnen Sie für denjenigen Monat, der dem genannten Sommermonat vorherging, die prozentualen Anteile der Kunden der drei Baumärkte an der Gesamtzahl dieser Kunden. 3
- d** Ermitteln Sie auf der Grundlage des Modells, wie sich die prozentualen Anteile der Kunden der drei Baumärkte nach der Durchführung der Maßnahmen der Baumärkte A und B langfristig entwickeln würden, wenn das Wechselverhalten der Kunden konstant bliebe. 3
- e** Geben Sie an, für welchen der drei Baumärkte der Anteil der Kunden, die nach Beginn der beschriebenen Maßnahmen von einem Monat zum nächsten zu einem anderen Baumarkt wechseln, am kleinsten ist. Nennen Sie den zugehörigen Anteil. 2

Der Baumarkt C muss befürchten, den für seinen wirtschaftlichen Erfolg notwendigen Anteil von 25 % der Kunden aller drei Baumärkte nicht zu erreichen. Der Baumarkt führt deshalb Rabattaktionen durch, mit deren Hilfe Kunden gebunden werden sollen. Ab dem Monat, in dem die Aktionen beginnen, lässt sich das Wechselverhalten der Kunden von einem Monat zum nächsten im Modell durch eine Matrix

$N = \begin{pmatrix} 0,63 & 0,18 & 0,4 \cdot (1-p) \\ 0,27 & 0,72 & 0,6 \cdot (1-p) \\ 0,1 & 0,1 & p \end{pmatrix}$ mit $p \in [0;1]$ beschreiben.

- f** In einem Monat nach Beginn der Rabattaktionen hat der Baumarkt A 3400 Kunden, der Baumarkt B 5200 Kunden und der Baumarkt C 1400 Kunden. Im folgenden Monat hat der Baumarkt A 3022 Kunden. Untersuchen Sie, ob diese Kundenzahl mit dem Modell in Einklang steht, das mithilfe der Matrix N beschrieben wird. 3
- g** Im Monat vor Beginn der Rabattaktionen hatte der Baumarkt A 3530 Kunden, der Baumarkt B 5294 Kunden und der Baumarkt C 1176 Kunden. Ermitteln Sie ausgehend von diesen Werten, in welchem Bereich der prozentuale Anteil der Kunden des Baumarkts C im folgenden Monat liegen kann. 3

h Zeigen Sie, dass es für jeden Wert von $p \in [0;1]$ einen Vektor \vec{v}_p gibt, dessen Komponenten nicht negativ sind, dessen Spaltensumme 10000 ist und für den $N \cdot \vec{v}_p = \vec{v}_p$ gilt.

5

Bestimmen Sie für einen geeignet gewählten Wert von p einen Vektor \vec{v}_p , dessen Komponenten ganzzahlig sind, und interpretieren Sie die Bedeutung dieses Vektors im Sachzusammenhang.

25

2 Erwartungshorizont

Der Erwartungshorizont stellt für jede Teilaufgabe dar, in welchem Umfang und in welcher Form eine Lösung erwartet wird; nicht alle Lösungen sind dazu vollständig ausgeführt. Nicht dargestellte korrekte Lösungen sind als gleichwertig zu akzeptieren.

	BE
<p>a Das Gleichungssystem</p> <p>I $0,3 \cdot a + 0,4 \cdot b + 0,2 \cdot c = 3500$ II $0,5 \cdot a + 0,5 \cdot b + 0,3 \cdot c = 4840$ III $0,2 \cdot a + 0,1 \cdot b + 0,5 \cdot c = 1660$</p> <p>liefert: $a = 3400$, $b = 5800$, $c = 800$</p>	3
<p>b</p> $(M^{-1})^5 \cdot \begin{pmatrix} 3539 \\ 5281 \\ 1180 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} -14466 \\ -23189 \\ 47654 \end{pmatrix}$ <p>Ein negativer Wert für die Anzahl der Kunden eines Baumarkts ist im Sachzusammenhang nicht sinnvoll.</p>	3
<p>c</p> $M^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 3539 \\ 5281 \\ 1180 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 3544 \\ 5256 \\ 1200 \end{pmatrix}, \quad \frac{3544}{10000} \approx 35,4\%, \quad \frac{5256}{10000} \approx 52,6\%, \quad \frac{1200}{10000} = 12\%$	3
<p>d</p> $\lim_{n \rightarrow \infty} M^n \approx \begin{pmatrix} 0,3529 & 0,3529 & 0,3529 \\ 0,5294 & 0,5294 & 0,5294 \\ 0,1176 & 0,1176 & 0,1176 \end{pmatrix}$ <p>Der Anteil der Kunden des Baumarkts A läge langfristig bei etwa 35,3 %, der des Baumarkts B bei etwa 52,9 % und der des Baumarkts C bei etwa 11,8 %.</p>	3
<p>e Baumarkt B Anteil: 28 %</p>	2
<p>f $0,63 \cdot 3400 + 0,18 \cdot 5200 + 0,4 \cdot (1-p) \cdot 1400 = 3022 \Leftrightarrow p = 1,1$. Da $1,1 \notin [0;1]$, steht die Kundenzahl nicht in Einklang mit dem Modell.</p>	3

g	$N \cdot \begin{pmatrix} 3530 \\ 5294 \\ 1176 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dots \\ \dots \\ 882,4 + 1176p \end{pmatrix}$ $\frac{882,4+1176p}{10000} = 0,08824 + 0,1176p$ <p>Damit liegt der Anteil der Kunden des Baumarkts C im folgenden Monat im Bereich von etwa 9 % bis etwa 21 %.</p>	3
h	$N \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ 10000 - x - y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 10000 - x - y \end{pmatrix}$ liefert für $p \in [0;1]$: $x = \frac{40000 \cdot (p-1)}{10 \cdot p - 11} \geq 0, \quad y = \frac{60000 \cdot (p-1)}{10 \cdot p - 11} \geq 0, \quad 10000 - x - y = \frac{10000}{11-10p} \geq 0$ $\vec{v}_{0,1} = \begin{pmatrix} 3600 \\ 5400 \\ 1000 \end{pmatrix}$ <p>Die durch den Vektor beschriebene Verteilung der Kunden bleibt von einer Woche zur nächsten unverändert.</p>	5
		25

3 Standardbezug

Teilaufgabe	BE	allgemeine mathematische Kompetenzen ²						Anforderungsbereich		
		K1	K2	K3	K4	K5	K6	I	II	III
a	3			II	II	II			X	
b	3	II		II		II			X	
c	3			I		I		X		
d	3		II	II		II			X	
e	2	I		I	I			X		
f	3	II	II			I			X	
g	3		III	II		II				X
h	5		III	II		III				X

4 Bewertungshinweise

Die Bewertung der erbrachten Prüfungsleistungen hat sich für jede Teilaufgabe nach der am rechten Rand der Aufgabenstellung angegebenen Anzahl maximal erreichbarer Bewertungseinheiten (BE) zu richten.

² Für jede Kompetenz, die bei der Bearbeitung der Teilaufgabe eine wesentliche Rolle spielt, ist der Anforderungsbereich (I, II oder III) eingetragen, in dem die Kompetenz benötigt wird.

Für die Bewertung der Gesamtleistung eines Prüflings ist ein Bewertungsraster³ vorgesehen, das angibt, wie die in den Prüfungsteilen A und B insgesamt erreichten Bewertungseinheiten in Notenpunkte umgesetzt werden.

³ Das Bewertungsraster ist Teil des Dokuments „Beschreibung der Struktur“, das auf den Internetseiten des IQB zum Download bereitsteht.