Gemeinsame Abituraufgabenpools der Länder

Pool für das Jahr 2017

Aufgabe für das Fach Mathematik

Kurzbeschreibung

Anforderungsniveau	Prüfungsteil	Sachgebiet	digitales Hilfsmittel
erhöht	B	Analysis	WTR

1 Aufgabe

	BE
1 Für jedes $k \in \mathbb{R}^+$ ist eine Funktion $f_k : x \mapsto k^2x^3 - 6kx^2 + 9x$ mit $x \in \mathbb{R}$ gegeben. Der Graph von f_k wird mit G_k bezeichnet.	
a Geben Sie das Verhalten von f_k für $x \to -\infty$ und $x \to +\infty$ an.	2
b Berechnen Sie die Nullstellen von f_k.	4
c Begründen Sie, dass G_k weder bezüglich des Koordinatenursprungs noch bezüglich der y-Achse symmetrisch ist.	2
d Weisen Sie nach, dass $f_k'(x) = 3 \cdot (kx - 1) \cdot (kx - 3)$ eine Gleichung der ersten Ableitungsfunktion von f_k ist.	3
e Berechnen Sie denjenigen Wert von k, für den sich die x-Koordinaten der beiden Extrempunkte von G_k um 6 unterscheiden.	4
f Für jeden Wert von k wird die Tangente an G_k im Wendepunkt $\left(\frac{2}{k} \mid \frac{2}{k}\right)$ betrachtet. Zeigen Sie, dass die Tangenten für unterschiedliche Werte von k parallel zueinander sind.	3

g Abbildung 1 zeigt für einen bestimmten Wert von k den Graphen von f_k sowie den Graphen einer in IR definierten Funktion h mit $h(x) = f_k(x) + d$ mit $d \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Ordnen Sie die beiden Funktionen jeweils einem der beiden Graphen I und II zu. Begründen Sie Ihre Zuordnung und bestimmen Sie die Werte von k und d. 4

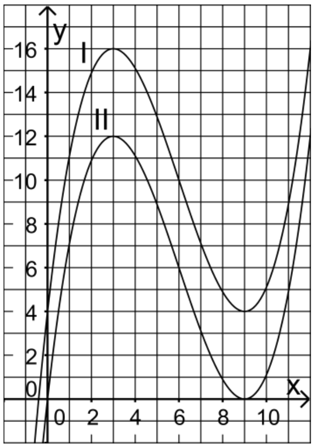


Abb. 1

h Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt $f_2(x) = \frac{1}{2} \cdot f_1(2x)$. Beschreiben Sie, wie der Graph von f_2 aus dem Graphen von f_1 hervorgeht. 2

Abbildung 2 zeigt den Graphen G_1 von f_1. Betrachtet werden die in IR definierten Funktionen L und M mit $L(x) = \int_0^x f_1(t)\,dt$ und $M(x) = \int_3^x f_1(t)\,dt$.

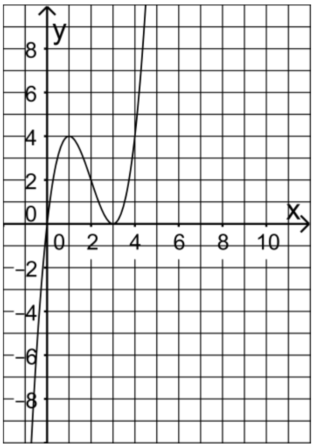


Abb. 2

i Begründen Sie ohne Rechnung, dass der Punkt $(0|0)$ Tiefpunkt des Graphen der Funktion L ist. 3

j Geben Sie zwei besondere Eigenschaften des Graphen von L bei $x = 3$ an. Begründen Sie jeweils Ihre Angabe. 3

k Begründen Sie, dass der Graph der Funktion M aus dem Graphen der Funktion L durch eine Verschiebung in negative y-Richtung hervorgeht. 2

2 Betrachtet wird eine große rotationssymmetrische Schale, die aus einem Steinblock gefertigt wurde. Ein Kubikmeter des Steins hat eine Masse von 2700 kg.

In einem Koordinatensystem kann ein Querschnitt der Schale mithilfe der Graphen der folgenden Funktionen modellhaft dargestellt werden:

$p: x \mapsto \sqrt{6x}$, $0 \le x \le 6$ $\qquad$ $q: x \mapsto \sqrt{4x - 8}$, $2 \le x \le 6$

Dabei beschreibt die x-Achse die Rotationsachse der Schale; eine Längeneinheit im Koordinatensystem entspricht 1 dm (vgl. Abbildung 3).

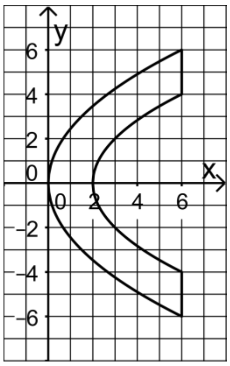
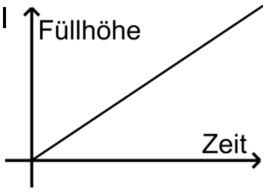
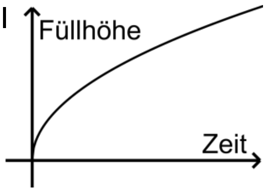


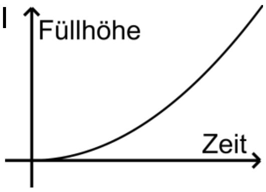
Abb. 3

a Interpretieren Sie den Term $p(6) - q(6)$ im Sachzusammenhang. 2

b In die aufrecht stehende Schale wird mit konstanter Zuflussrate Wasser gefüllt. Entscheiden Sie, welcher der abgebildeten Graphen I, II und III für diesen Vorgang die Füllhöhe in Abhängigkeit von der Zeit beschreibt. Begründen Sie Ihre Entscheidung. 2

I


II


III


c Weisen Sie nach, dass sich bei dem beschriebenen Füllvorgang der Flächeninhalt A der Wasseroberfläche (in dm^2) in Abhängigkeit von der Füllhöhe h (in dm) mithilfe der Gleichung $A(h) = 4\pi h$ berechnen lässt. 4

d Interpretieren Sie im Sachzusammenhang die Funktion s mit $s(x) = \pi \cdot \int_2^{2+x} (q(t))^2 \, dt$ und geben Sie den größten Definitionsbereich von s an, der im Sachzusammenhang sinnvoll ist. 4

e Berechnen Sie die Masse der Schale. 6

50

2 Erwartungshorizont

Der Erwartungshorizont stellt für jede Teilaufgabe dar, in welchem Umfang und in welcher Form eine Lösung erwartet wird; nicht alle Lösungen sind dazu vollständig ausgeführt. Nicht dargestellte korrekte Lösungen sind als gleichwertig zu akzeptieren.

			BE
1	**a**	$\lim\limits_{x\to-\infty} f_k(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f_k(x) = +\infty$	2
	b	$f_k(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = \frac{3}{k}$	4
	c	f_k ist eine ganzrationale Funktion, deren Term Potenzen von x mit geraden und ungeraden Exponenten enthält.	2
	d	$f_k'(x) = 3k^2x^2 - 12kx + 9$, $3 \cdot (kx-1) \cdot (kx-3) = 3k^2x^2 - 12kx + 9$	3
	e	$f_k'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{k} \vee x = \frac{3}{k}$, $\frac{3}{k} - \frac{1}{k} = 6 \Leftrightarrow k = \frac{1}{3}$	4
	f	Für jeden Wert von k ist die Steigung der betrachteten Tangente $f_k'\left(\frac{2}{k}\right) = -3$.	3
	g	I: h, II: f_k Begründung: Nur der Graph II verläuft durch den Koordinatenursprung. Der Schnittpunkt des Graphen I mit der y-Achse liefert $d = 4$, die Lage der Extrempunkte des Graphen II $k = \frac{1}{3}$.	4

	h	Der Graph von f_2 geht aus dem Graphen von f_1 durch Streckung mit dem Faktor $\frac{1}{2}$ in x-Richtung und Streckung mit dem Faktor $\frac{1}{2}$ in y-Richtung hervor.	2
	i	$L(0)=0$, $L'(x)=f_1(x)$, $f_1(0)=0$, $f_1(x)<0$ für $x<0$, $f_1(x)>0$ für $x>0$	3
	j	♦ Die Tangente an den Graphen von L im Punkt $(3\mid L(3))$ verläuft parallel zur x-Achse. Begründung: $f_1(3)=0$ ♦ Der Graph von L besitzt im Punkt $(3\mid L(3))$ einen Wendepunkt. Begründung: Der Graph von f_1 hat im Punkt $(3\mid f_1(3))$ einen Tiefpunkt.	3
	k	$M(x)=L(x)-\int_0^3 f_1(t)\,dt$ Der Abbildung ist zu entnehmen, dass $\int_0^3 f_1(t)\,dt>0$ gilt.	2
2	a	Der Term gibt die Breite des Rands der Schale in Dezimetern an.	2
	b	Graph II Begründung: Da der Durchmesser der Schale nach oben hin zunimmt, nimmt die Änderungsrate der Füllhöhe mit der Zeit ab.	2
	c	$A(h)=\pi\cdot\left(q(2+h)\right)^2=4\pi h$	4
	d	Die Funktion s beschreibt das Volumen des Wassers in der Schale in dm^3 in Abhängigkeit von der Füllhöhe x in dm. Definitionsbereich: $[0;4]$	4
	e	$\pi\cdot\int_0^6 (p(x))^2\,dx-\pi\cdot\int_2^6 (q(x))^2\,dx=\pi\cdot\left[3x^2\right]_0^6-\pi\cdot\left[2x^2-8x\right]_2^6=76\pi$ $76\pi\cdot 2{,}7\approx 645$, d. h. die Masse der Schale beträgt etwa 645 kg.	6
			50

3 Standardbezug

Teilaufgabe	BE	allgemeine mathematische Kompetenzen[1]						Anforderungsbereich		
		K1	K2	K3	K4	K5	K6	I	II	III
1 a	2					I		X		
b	4					I		X		
c	2	I				I	I	X		
d	3					II			X	
e	4		I			II			X	

[1] Für jede Kompetenz, die bei der Bearbeitung der Teilaufgabe eine wesentliche Rolle spielt, ist der Anforderungsbereich (I, II oder III) eingetragen, in dem die Kompetenz benötigt wird.

f	3	II				II	I		X	
g	4	II			II	II			X	
h	2	II			II		I		X	
i	3	II			II	II			X	
j	3	III			II	II				X
k	2	III			II	II				X
2 a	2	I		I			I	X		
b	2	II			II		II		X	
c	4		II	II		II			X	
d	4	III	III	III						X
e	6		III	II		III				X

4 Bewertungshinweise

Die Bewertung der erbrachten Prüfungsleistungen hat sich für jede Teilaufgabe nach der am rechten Rand der Aufgabenstellung angegebenen Anzahl maximal erreichbarer Bewertungseinheiten (BE) zu richten.

Für die Bewertung der Gesamtleistung eines Prüflings ist ein Bewertungsraster[2] vorgesehen, das angibt, wie die in den Prüfungsteilen A und B insgesamt erreichten Bewertungseinheiten in Notenpunkte umgesetzt werden.

[2] Das Bewertungsraster ist Teil des Dokuments „Beschreibung der Struktur“, das auf den Internetseiten des IQB zum Download bereitsteht.