Gemeinsame Abituraufgabenpools der Länder

Pool für das Jahr 2017

Aufgabe für das Fach Mathematik

Kurzbeschreibung

Anforderungsniveau	Prüfungsteil	Sachgebiet	digitales Hilfsmittel
erhöht	B	Analysis	WTR

1 Aufgabe

BE

1 Abbildung 1 zeigt den Graphen einer Funktion f, die für $0 \le t \le 15$ das Volumen des Wassers in einem Becken in Abhängigkeit von der Zeit beschreibt. Dabei ist t die seit Beobachtungsbeginn vergangene Zeit in Stunden und $f(t)$ das Volumen in Kubikmetern.

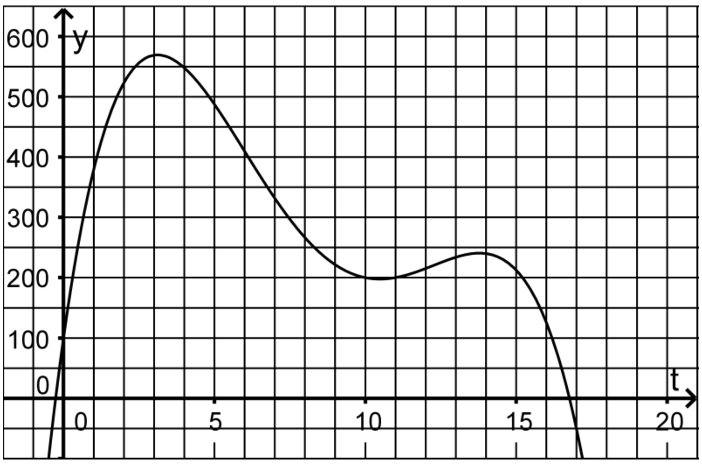


Abb. 1

a Geben Sie das Volumen des Wassers fünf Stunden nach Beobachtungsbeginn an sowie den Zeitraum, in dem das Volumen mindestens 350 Kubikmeter beträgt. | 3

b Bestimmen Sie die momentane Änderungsrate des Wasservolumens zwei Stunden nach Beobachtungsbeginn. | 4

c Die fünfzehn Stunden nach Beobachtungsbeginn vorliegende momentane Änderungsrate des Wasservolumens bleibt bis zu dem Zeitpunkt erhalten, zu dem das Becken kein Wasser mehr enthält. Beschreiben Sie ein Verfahren, mit dem man diesen Zeitpunkt grafisch bestimmen kann. Geben Sie den Zeitpunkt an. 3

d Interpretieren Sie die Gleichung $f(t+6)=f(t)-350$ im Sachzusammenhang. Geben Sie eine Lösung der Gleichung an. 4

e Begründen Sie, dass die Funktionsgleichung von f weder die Form I noch die Form II hat: 3

I $\quad y=-0{,}3t^4+at^2+100,\ a\in\mathbb{R}$

II $\quad y=8{,}5t^3+3{,}7t^2+bt+100,\ b\in\mathbb{R}$

2 Für ein anderes Becken wird die momentane Änderungsrate des Volumens des enthaltenen Wassers für $0\leq t\leq 15$ durch die Funktion g mit $g(t)=0{,}4\cdot\left(2t^3-39t^2+180t\right)$ beschrieben. Dabei ist t die seit Beobachtungsbeginn vergangene Zeit in Stunden und $g(t)$ die Änderungsrate in $\frac{m^3}{h}$. Die Funktion G mit $G(t)=0{,}2\cdot\left(t^4-26t^3+180t^2\right)$ ist eine Stammfunktion von g.

a Berechnen Sie für den beschriebenen Zeitraum denjenigen Zeitpunkt, zu dem die momentane Änderungsrate des Wasservolumens maximal ist. 5

b Ermitteln Sie rechnerisch den Zeitraum, in dem das Volumen des Wassers abnimmt. 4

c Drei Stunden nach Beobachtungsbeginn sind im Becken 350 Kubikmeter Wasser enthalten. Bestimmen Sie das Volumen des Wassers zu Beobachtungsbeginn. 4

d Untersuchen Sie rechnerisch, ob es nach Beobachtungsbeginn einen Zeitpunkt gibt, zu dem das Wasservolumen ebenso groß ist wie zu Beobachtungsbeginn. 5

3 Für jeden Wert $c\in\mathbb{R}^+$ ist die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion $h_c: x\mapsto c\cdot\sin(cx)$ gegeben. Abbildung 2 zeigt den Graphen von h_1.

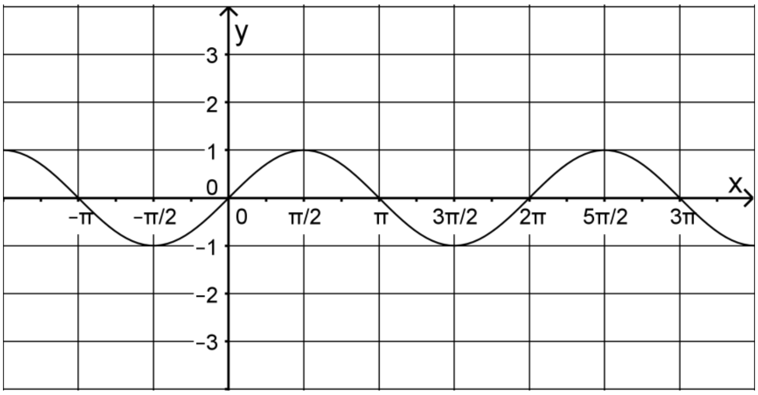


Abb. 2

a Skizzieren Sie für $c=\frac{1}{2}$ und $c=2$ jeweils den Graphen von h_c in Abbildung 2. 4

b Eine Nullstelle von h_c ist 0, die benachbarte positive Nullstelle wird mit u bezeichnet. Geben Sie den Wert von u in Abhängigkeit von c an. Berechnen Sie damit den Inhalt des Flächenstücks, das der Graph von h_c für $0\leq x\leq u$ mit der x-Achse einschließt. 5

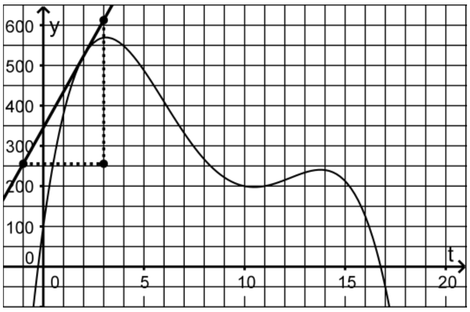
c Beschreiben Sie, wie man ohne Verwendung einer Ableitungsfunktion die Koordinaten eines Tiefpunkts des Graphen von h_c in Abhängigkeit von c ermitteln kann. Geben Sie die Koordinaten eines Tiefpunkts an. 3

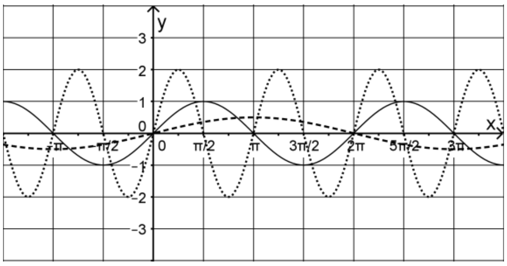
d Geben Sie einen Term der 103. Ableitung von h_c an. 3

50

2 Erwartungshorizont

Der Erwartungshorizont stellt für jede Teilaufgabe dar, in welchem Umfang und in welcher Form eine Lösung erwartet wird; nicht alle Lösungen sind dazu vollständig ausgeführt. Nicht dargestellte korrekte Lösungen sind als gleichwertig zu akzeptieren.

			BE
1	**a**	Das Volumen des Wassers fünf Stunden nach Beobachtungsbeginn beträgt etwa $490\,\text{m}^3$. Der Zeitraum, in dem das Volumen mindestens 350 Kubikmeter beträgt, beginnt etwa 0,9 Stunden und endet etwa 6,8 Stunden nach Beobachtungsbeginn.	3
	b	 $\frac{\Delta y}{\Delta t} \approx \frac{360}{4} = 90$ Die momentane Änderungsrate beträgt etwa $90\,\frac{\text{m}^3}{\text{h}}$.	4
	c	Zeichnet man die Tangente an den Graphen von f im Punkt $(15 \mid f(15))$ in die Abbildung ein, so liefert die x-Koordinate des Schnittpunkts dieser Tangente mit der t-Achse den gesuchten Zeitpunkt. Das Becken enthält etwa 19 Stunden nach Beobachtungsbeginn kein Wasser mehr.	3
	d	Die Lösung der Gleichung liefert diejenigen Zeitpunkte, zu dem das Volumen des Wassers 350 Kubikmeter größer ist als sechs Stunden später. $t \approx 3$ (Hinweis: Weitere Lösung ist $t \approx 4$.)	4
	e	Der Graph einer Funktion der Form I ist symmetrisch bezüglich der y-Achse. Der Graph einer Funktion der Form II hat nur einen Wendepunkt.	3
2	**a**	$g'(t) = 0{,}4 \cdot \left(6t^2 - 78t + 180\right)$, $g'(t) = 0 \Leftrightarrow t^2 - 13t + 30 = 0 \Leftrightarrow t = 3 \vee t = 10$ Wegen $g(0) = 0$, $g(3) = 97{,}2$, $g(10) = -40$ und $g(15) = 270$ ist die momentane Änderungsrate 15 Stunden nach Beobachtungsbeginn maximal.	5
	b	$g(t) = 0 \Leftrightarrow 2t \cdot \left(t^2 - 19{,}5t + 90\right) = 0 \Leftrightarrow t = 0 \vee t = 7{,}5 \vee t = 12$ Da $g(10) < 0$, liegt der Zeitraum zwischen 7,5 und 12 Stunden nach Beobachtungsbeginn.	4

	c	$350-\int_0^3 g(t)\,dt = 350-\left[G(t)\right]_0^3 \approx 150$ Zu Beobachtungsbeginn enthielt das Becken etwa $150\,\text{m}^3$ Wasser.	4
	d	$\int_0^x g(t)\,dt = 0 \Leftrightarrow \left[G(t)\right]_0^x = 0 \Leftrightarrow x^2\cdot\left(x^2-26x+180\right)=0 \Leftrightarrow x=0$ Es gibt nach Beobachtungsbeginn keinen Zeitpunkt, zu dem das Wasservolumen ebenso groß ist wie zu Beobachtungsbeginn.	5
3	a	 Der Graph zu $c=\frac{1}{2}$ ist gestrichelt, der zu $c=2$ gepunktet dargestellt.	4
	b	Mit $u=\frac{\pi}{c}$ ergibt sich: $\int_0^{\frac{\pi}{c}} h_c(x)\,dx = \left[-\cos(cx)\right]_0^{\frac{\pi}{c}} = 2$	5
	c	Die x-Koordinate eines Tiefpunkts ergibt sich als Mittelwert der beiden kleinsten positiven Nullstellen von h_c, die zugehörige y-Koordinate als entsprechender Funktionswert von h_c. Koordinaten dieses Tiefpunkts: $x=\frac{3\pi}{2c}$, $y=-c$	3
	d	$-c^{104}\cdot\cos(cx)$	3
			50

3 Standardbezug

Teilaufgabe	BE	allgemeine mathematische Kompetenzen[1]						Anforderungsbereich		
		K1	K2	K3	K4	K5	K6	I	II	III
1 a	3				I		I	X		
b	4			I	I	I		X		
c	3			II	II		II		X	
d	4		III	II	II					X
e	3	II			II	II			X	
2 a	5	I		I		II			X	
b	4	I		II		II			X	
c	4		III	II		II				X
d	5		III	II		III				X
3 a	4				I	I		X		

[1] Für jede Kompetenz, die bei der Bearbeitung der Teilaufgabe eine wesentliche Rolle spielt, ist der Anforderungsbereich (I, II oder III) eingetragen, in dem die Kompetenz benötigt wird.

b	5		II			II			X	
c	3	II	II				II		X	
d	3	III	III			II				X

4 Bewertungshinweise

Die Bewertung der erbrachten Prüfungsleistungen hat sich für jede Teilaufgabe nach der am rechten Rand der Aufgabenstellung angegebenen Anzahl maximal erreichbarer Bewertungseinheiten (BE) zu richten.

Für die Bewertung der Gesamtleistung eines Prüflings ist ein Bewertungsraster[2] vorgesehen, das angibt, wie die in den Prüfungsteilen A und B insgesamt erreichten Bewertungseinheiten in Notenpunkte umgesetzt werden.

[2] Das Bewertungsraster ist Teil des Dokuments „Beschreibung der Struktur“, das auf den Internetseiten des IQB zum Download bereitsteht.