Gemeinsame Abituraufgabenpools der Länder

Pool für das Jahr 2017

Aufgabe für das Fach Mathematik

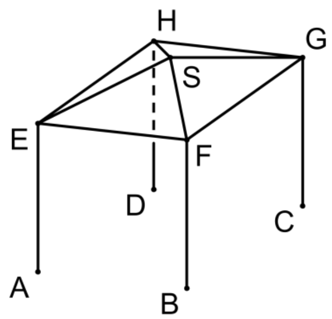
Kurzbeschreibung

Anforderungsniveau	Prüfungsteil	Sachgebiet[1]	digitales Hilfsmittel
erhöht	B	AG/LA (A2)	WTR

1 Aufgabe

	BE

Ein Turm auf einem Spielplatz besteht aus vier 4,50 m langen, vertikal stehenden Pfosten, vier horizontalen Balken und einem Dach in Form einer geraden Pyramide. Die Abbildung zeigt den Turm schematisch. Die Dicke der Bauteile des Turms soll vernachlässigt werden.



In einem kartesischen Koordinatensystem können die Enden der Pfosten für einen Wert von z mit $z \in \mathbb{R}$ modellhaft durch die Punkte $A(2\,|\,-3\,|\,z)$, B, C und $D(-3\,|\,-2\,|\,z)$ sowie $E(2\,|\,-3\,|\,4)$, $F(3\,|\,2\,|\,4)$, $G(-2\,|\,3\,|\,4)$ und H dargestellt werden, die Spitze des Dachs durch den Punkt $S(0\,|\,0\,|\,5)$. Dabei beschreibt die x_1x_2-Ebene den Untergrund; eine Längeneinheit im Koordinatensystem entspricht 1 m in der Wirklichkeit.

a Geben Sie an, wie tief die Pfosten in den Untergrund hineinreichen. 1

b Geben Sie die Koordinaten des Punkts H an. Weisen Sie nach, dass das Viereck EFGH ein Quadrat ist. 5

c Begründen Sie, dass die Pyramide EFGHS symmetrisch bezüglich der x_3-Achse ist. 3

d Die Punkte E, F und S liegen in einer Ebene L. Bestimmen Sie eine Gleichung von L in Koordinatenform. 4

[1] verwendete Abkürzungen: AG/LA (A1) - Analytische Geometrie/Lineare Algebra (Alternative A1), AG/LA (A2) - Analytische Geometrie/Lineare Algebra (Alternative A2)

e	An der Spitze des Dachs ist eine gerade Stange befestigt, deren oberer Endpunkt im Modell durch einen Punkt T dargestellt wird. Auf den Turm treffendes Sonnenlicht lässt sich im Modell durch parallele Geraden mit dem Richtungsvektor $\vec{v}$ beschreiben. Der Schatten der Stange liegt vollständig auf der Dachfläche, die durch das Dreieck EFS beschrieben wird. Beschreiben Sie, wie man die Länge dieses Schattens berechnen kann, wenn die Koordinaten von T und $\vec{v}$ bekannt sind.	4
f	Zur Stabilisierung des Turms wurden zusätzliche Balken mit einer Länge von 2,10 m verwendet. Ein solcher Balken ist mit einem Ende in einer Höhe von 3,50 m über dem Untergrund an einem der vertikal stehenden Pfosten befestigt, mit dem anderen Ende an einem der beiden darauf liegenden horizontalen Balken. Der obere Befestigungspunkt teilt den horizontalen Balken in zwei Abschnitte. Bestimmen Sie das Verhältnis der Längen der beiden Abschnitte.	5
g	Es soll eine vertikale Kletterstange aufgestellt werden, deren Fußpunkt im Modell durch einen Punkt P der x_1x_2-Ebene beschrieben wird. Die Kletterstange soll von dem Pfosten, der durch $\overline{AE}$ dargestellt wird, doppelt so weit entfernt sein wie von dem Pfosten, der durch $\overline{BF}$ dargestellt wird. Bestimmen Sie für zwei mögliche Positionen der Kletterstange jeweils die Koordinaten von P.	3
		25

2 Erwartungshorizont

Der Erwartungshorizont stellt für jede Teilaufgabe dar, in welchem Umfang und in welcher Form eine Lösung erwartet wird; nicht alle Lösungen sind dazu vollständig ausgeführt. Nicht dargestellte korrekte Lösungen sind als gleichwertig zu akzeptieren.

		BE
a	Die Pfosten ragen 0,5 m in den Untergrund hinein.	1
b	$H(-3\,\|\,-2\,\|\,4)$ Wegen $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{HG}$ ist es ein Parallelogramm, wegen $\overrightarrow{EF} \circ \overrightarrow{FG} = 0$ und $\left\|\overrightarrow{EF}\right\| = \left\|\overrightarrow{FG}\right\|$ ein Quadrat.	5
c	Die Pyramide ist gerade und hat eine quadratische Grundfläche, die parallel zur x_1x_2-Ebene ist. Der Mittelpunkt der Grundfläche liegt ebenso auf der x_3-Achse wie die Spitze S.	3
d	$L: \vec{x} = \overrightarrow{OE} + r \cdot \overrightarrow{EF} + s \cdot \overrightarrow{ES};\ r,s \in \mathbb{R}$ Das daraus resultierende Gleichungssystem I $x_1 = 2 + r - 2s$ II $x_2 = -3 + 5r + 3s$ III $x_3 = 4 + s$ liefert: $L: 5x_1 - x_2 + 13x_3 = 65$	4
e	Man berechnet die Koordinaten des Schnittpunkts der Ebene L und der Geraden, die durch T verläuft und den Richtungsvektor $\vec{v}$ hat. Der Abstand dieses Schnittpunkts vom Punkt S ist die Länge des Schattens in Metern.	4

f	Wählt man für die beiden Punkte, die im Modell die beiden Enden des zusätzlichen Balkens darstellen, $I \in \overline{AE}$ und $J \in \overline{EF}$, so gilt: ♦ I hat die Koordinaten $(2\,\|\,-3\,\|\,3{,}5)$. ♦ J liegt auf der Geraden $g: \vec{x} = \overrightarrow{OE} + t \cdot \overrightarrow{EF}$ mit $t \in \mathbb{R}$, hat also die Koordinaten $(2+t\,\|\,-3+5t\,\|\,4)$. Für $0 \leq t \leq 1$ gilt: $\left\|\overrightarrow{IJ}\right\| = \sqrt{t^2 + (5t)^2 + 0{,}5^2} = 2{,}1 \Leftrightarrow t = 0{,}4$ Damit ergibt sich als Verhältnis $2:3$.	5
g	Mit $A'(2\,\|\,-3\,\|\,0)$ und $B'(3\,\|\,2\,\|\,0)$ liefert ♦ $\overrightarrow{OP_1} = \overrightarrow{OA'} + \frac{2}{3}\overrightarrow{A'B'}$: $P_1\left(\frac{8}{3}\,\|\,\frac{1}{3}\,\|\,0\right)$, ♦ $\overrightarrow{OP_2} = \overrightarrow{OA'} + 2 \cdot \overrightarrow{A'B'}$: $P_2(4\,\|\,7\,\|\,0)$.	3
		25

3 Standardbezug

Teilaufgabe	BE	allgemeine mathematische Kompetenzen[2]						Anforderungsbereich		
		K1	K2	K3	K4	K5	K6	I	II	III
a	1	I		I		I		X		
b	5	I			I	I		X		
c	3	II	II				II		X	
d	4					II			X	
e	4		II	II			II		X	
f	5		III	III		III				X
g	3		III			II	II			X

4 Bewertungshinweise

Die Bewertung der erbrachten Prüfungsleistungen hat sich für jede Teilaufgabe nach der am rechten Rand der Aufgabenstellung angegebenen Anzahl maximal erreichbarer Bewertungseinheiten (BE) zu richten.

Für die Bewertung der Gesamtleistung eines Prüflings ist ein Bewertungsraster[3] vorgesehen, das angibt, wie die in den Prüfungsteilen A und B insgesamt erreichten Bewertungseinheiten in Notenpunkte umgesetzt werden.

[2] Für jede Kompetenz, die bei der Bearbeitung der Teilaufgabe eine wesentliche Rolle spielt, ist der Anforderungsbereich (I, II oder III) eingetragen, in dem die Kompetenz benötigt wird.
[3] Das Bewertungsraster ist Teil des Dokuments „Beschreibung der Struktur“, das auf den Internetseiten des IQB zum Download bereitsteht.