Gemeinsame Abituraufgabenpools der Länder

Pool für das Jahr 2017

Aufgabe für das Fach Mathematik

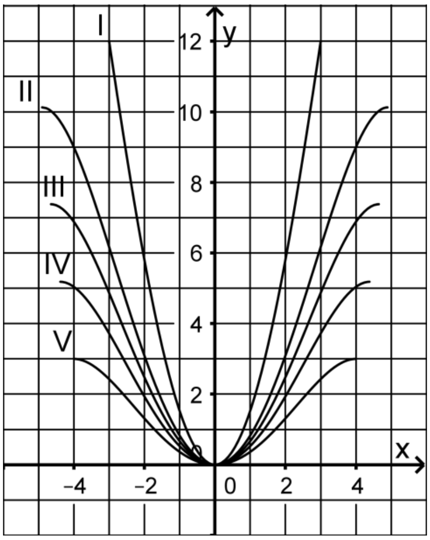
Kurzbeschreibung

Anforderungsniveau	Prüfungsteil	Sachgebiet	digitales Hilfsmittel
erhöht	B	Analysis	CAS

1 Aufgabe

BE

Die Abbildung zeigt schematisch Längsschnitte von fünf Gläsern einer Glas-Serie; Füße und Stiele der Gläser sind nicht abgebildet. Die Gläser sind rotationssymmetrisch, d. h. jeder zur Rotationsachse senkrechte Querschnitt durch ein Glas ist kreisförmig. Im eingezeichneten Koordinatensystem werden die Rotationsachsen der Gläser durch die y-Achse dargestellt; eine Längeneinheit entspricht 1 cm in der Wirklichkeit.



Die Formen der Gläser sind so gewählt, dass jeder der fünf Längsschnitte modellhaft mithilfe einer der in $\mathbb{R}$ definierten Funktionen f_k mit $f_k(x) = -\frac{3}{512}k \cdot x^4 + \frac{3}{32}k^2 \cdot x^2$ und $k \in \mathbb{R}^+$ beschrieben werden kann. Dabei gehört die Funktion f_2 zum Likörglas der Serie, die Funktion f_3 zum Cocktailglas. Das Sektglas hat eine Höhe von 12 cm, sein Rand einen Durchmesser von 6 cm. Die Materialstärke der Gläser soll vernachlässigt werden.

1 **a** Ordnen Sie dem Likörglas und dem Cocktailglas jeweils den zugehörigen Graphen aus der Abbildung zu. 2

b Bestimmen Sie für das Sektglas den zugehörigen Wert von k. 2

c Begründen Sie, dass der Graph von f_k für jedes $k \in IR^+$ symmetrisch bezüglich der y-Achse ist. 2

d Bestimmen Sie Lage und Art der Extremstellen von f_k. 5

(zur Kontrolle: Eine Extremstelle ist $x = 2\sqrt{2k}$.)

e Weisen Sie für die Schar der Graphen von f_k nach, dass alle Extrempunkte mit positiver x-Koordinate auf dem Graphen einer Funktion mit der Gleichung $y = \frac{3}{4096}x^6$ liegen. 3

2 Betrachtet wird nun das Cocktailglas, dessen Längsschnitt für $-2\sqrt{6} \le x \le 2\sqrt{6}$ durch f_3 beschrieben wird.

a Um das Glas verläuft 2 cm unterhalb des Rands eine eingeschliffene Linie. Berechnen Sie deren Länge. 5

b Die Form eines Glases wird in einem Bereich als konvex bezeichnet, wenn der Graph, der den zugehörigen Längsschnitt darstellt, linksgekrümmt ist. Bestimmen Sie für den Bereich des Cocktailglases, in dem dieses konvex ist, die zugehörigen x-Koordinaten. 3

Im Glas steht ein 20cm langer gerader Strohhalm, dessen Durchmesser vernachlässigt werden soll. Der untere Endpunkt des Strohhalms wird im Modell durch einen Punkt des Graphen von f_3 beschrieben, der Strohhalm hat mit seinem unteren Endpunkt also Kontakt zum Glas.

c Außerdem berührt der Strohhalm das Glas in dem Punkt, der im Modell durch $\left(4 \mid f_3(4)\right)$ dargestellt wird. Ermitteln Sie die Länge desjenigen Abschnitts des Strohhalms, der zwischen dem Berührpunkt und seinem oberen Endpunkt liegt. 4

d Die Lage des Strohhalms wird nun so verändert, dass sein unterer Endpunkt im Modell durch $P\left(-1 \mid f_3(-1)\right)$ dargestellt wird, der Punkt, in dem er das Glas berührt, durch $Q\left(u \mid f_3(u)\right)$ mit $u > 0$. Bestimmen Sie den Wert von u. 4

3 Betrachtet wird nun das oben beschriebene Sektglas der Serie. Ein Hochpunkt des Graphen der zugehörigen Funktion hat die Koordinaten $x \approx 5{,}7$ und $y \approx 25{,}2$, ein Wendepunkt die Koordinaten $x \approx 3{,}3$ und $y \approx 14{,}0$.

a Das Sektglas unterscheidet sich hinsichtlich der Form wesentlich vom Cocktailglas. Beschreiben Sie im Sachzusammenhang unter Berücksichtigung der gegebenen Punkte des zum Sektglas gehörenden Graphen zwei wesentliche Unterschiede. 4

Das Sektglas wird so aufgestellt, dass seine Rotationsachse vertikal ist. Es wird mit Flüssigkeit gefüllt. Für $-3 \le x \le 3$ kann der Längsschnitt des Glases näherungsweise durch die Funktion p mit $p(x) = \frac{4}{3}x^2$ beschrieben werden.

b Zeigen Sie unter Verwendung der Näherung durch die Funktion p, dass sich der Radius der Oberfläche der Flüssigkeit in Abhängigkeit von der Füllhöhe h durch die 3

Gleichung $r(h)=\frac{1}{2}\sqrt{3h}$ bestimmen lässt.

c Zeichnen Sie den Graphen der Funktion p sowie den Graphen der in $\mathbb{R}_0^+$ definierten Funktion $r: h \mapsto r(h)$ jeweils in ein geeignetes Koordinatensystem ein. 2

d Ermitteln Sie unter Verwendung von $r(h)$ das Volumen der Flüssigkeit bei einer Füllhöhe von 6 cm. 4

4 Der Längsschnitt des Likörglases soll für $0 \le x \le 4$ mithilfe zweier in $\mathbb{R}$ definierter quadratischer Funktionen p_1 und p_2 beschrieben werden, die folgende Eigenschaften besitzen: 7

- Die Scheitelpunkte der Graphen von p_1 und p_2 sollen im Tiefpunkt bzw. im Hochpunkt des Graphen von f_2 liegen.
- Die Graphen von p_1 und p_2 sollen ohne Knick ineinander übergehen. Der Punkt, in dem die beiden Graphen ineinander übergehen, hat die gleiche x-Koordinate wie der Wendepunkt des Graphen von f_2.

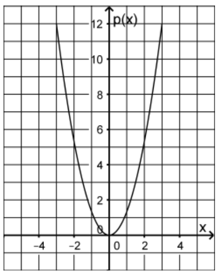
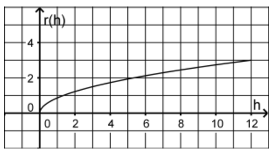
Bestimmen Sie die Funktionsgleichungen von p_1 und p_2.

50

2 Erwartungshorizont

Der Erwartungshorizont stellt für jede Teilaufgabe dar, in welchem Umfang und in welcher Form eine Lösung erwartet wird; nicht alle Lösungen sind dazu vollständig ausgeführt. Nicht dargestellte korrekte Lösungen sind als gleichwertig zu akzeptieren.

			BE
1	**a**	Likörglas: Graph V Cocktailglas: Graph II	2
	b	$f_k(3)=12$ liefert $k \approx 4{,}06$	2
	c	Der Term von f_k enthält nur Potenzen von x mit geradem Exponenten.	2
	d	$f_k'(x)=0 \Leftrightarrow x=-2\sqrt{2k} \vee x=0 \vee x=2\sqrt{2k}$, $f_k''\left(-2\sqrt{2k}\right)<0$, $f_k''(0)>0$, $f_k''\left(2\sqrt{2k}\right)<0$ Damit hat f_k ein Minimum bei $x=0$ sowie Maxima bei $x=-2\sqrt{2k}$ und $x=2\sqrt{2k}$.	5
	e	$\frac{3}{4096}\cdot\left(2\sqrt{2k}\right)^6=\frac{3}{8}k^3=f_k\left(2\sqrt{2k}\right)$	3
2	**a**	$f_3\left(2\sqrt{6}\right)-2=\frac{65}{8}$ Für $-2\sqrt{6} \le x \le 2\sqrt{6}$ gilt: $f_3(x)=\frac{65}{8} \Leftrightarrow x=-\frac{2}{3}\sqrt{30} \vee x=\frac{2}{3}\sqrt{30}$ $2\cdot\frac{2}{3}\sqrt{30}\cdot\pi \approx 23$ Die Länge der Linie beträgt etwa 23 cm.	5

	b	Der Abbildung ist zu entnehmen, dass das Glas in seinem unteren Bereich konvex ist. $f_3''(x)=0 \Leftrightarrow x=-2\sqrt{2} \vee x=2\sqrt{2}$ Damit: $x \in \left[-2\sqrt{2};2\sqrt{2}\right]$	3
	c	Gleichung der Tangente an f_3 im Punkt $\left(4 \mid f_3(4)\right)$: $y=\frac{9}{4}x$ Schnittpunkt der Tangente mit dem Graphen von f_3: $(0 \mid 0)$ Abstand der Punkte $(0 \mid 0)$ und $\left(4 \mid f_3(4)\right)$: $\sqrt{4^2+\left(f_3(4)\right)^2}=\sqrt{97}$ $20-\sqrt{97}\approx 10{,}2$, d. h. der Abschnitt ist etwa 10,2 cm lang.	4
	d	Gleichung der Tangente an f_3 im Punkt Q: $y=f_3'(u)\cdot(x-u)+f_3(u)$ Da P auf der Tangente liegt, gilt: $f_3(-1)=f_3'(u)\cdot(-1-u)+f_3(u) \Leftrightarrow u=\frac{1+\sqrt{142}}{3}$	4
3	**a**	Den Koordinaten des Hochpunkts lässt sich entnehmen, dass das Sektglas im Gegensatz zum Cocktailglas zum Rand hin nicht senkrecht zur Rotationsachse ausläuft, den Koordinaten des Wendepunkts, dass das Sektglas im Gegensatz zum Cocktailglas vollständig konvex ist.	4
	b	Für $r \geq 0$ gilt: $h(r)=\frac{4}{3}r^2 \Leftrightarrow r(h)=\frac{1}{2}\sqrt{3h}$	3
	c	 	2
	d	$\pi \cdot \int_0^6 \left(r(h)\right)^2 \, dh \approx 42$ Das Volumen der Flüssigkeit beträgt etwa $42\,\text{cm}^3$.	4
4		Der Graph von f_2 hat den Tiefpunkt $(0 \mid 0)$ und den Hochpunkt $(4 \mid 3)$. Die x-Koordinate des Wendepunkts ist $\frac{4}{3}\sqrt{3}$. Damit: $p_1(x)=ax^2$, $p_2(x)=-b\cdot(x-4)^2+3$ Die Bedingungen $p_1\left(\frac{4}{3}\sqrt{3}\right)=p_2\left(\frac{4}{3}\sqrt{3}\right)$ und $p_1'\left(\frac{4}{3}\sqrt{3}\right)=p_2'\left(\frac{4}{3}\sqrt{3}\right)$ liefern $a=\frac{3}{16}\sqrt{3}$ und $b=\frac{3}{32}\left(3+\sqrt{3}\right)$.	7
			50

3 Standardbezug

Teil-aufg.	BE	Leitideen					allgemeine mathematische Kompetenzen[1]						Anforderungs-bereich		
		L1	L2	L3	L4	L5	K1	K2	K3	K4	K5	K6	I	II	III
1 a	2				X		I			I			X		
b	2	X	X		X				II		II			X	
c	2			X	X		I				I	I	X		
d	5	X			X		I				I		X		
e	3				X		II		II			I		X	
2 a	5	X	X	X	X			II	II		II			X	
b	3	X		X	X				I		II	II		X	
c	4		X	X	X			II	II		II			X	
d	4	X		X	X			III	II		III				X
3 a	4			X	X				II	II		II		X	
b	3	X		X	X		II		II		II			X	
c	2				X					I			X		
d	4		X	X	X			III	III		II				X
4	7	X			X			III			II	III			X

4 Bewertungshinweise

Die Bewertung der erbrachten Prüfungsleistungen hat sich für jede Teilaufgabe nach der am rechten Rand der Aufgabenstellung angegebenen Anzahl maximal erreichbarer Bewertungseinheiten (BE) zu richten.

Für die Bewertung der Gesamtleistung eines Prüflings ist passend zur Konzeption der Aufgaben der Aufgabensammlung und des Abituraufgabenpools ein Bewertungsraster[2] vorgesehen, das angibt, wie die in den Prüfungsteilen A und B insgesamt erreichten Bewertungseinheiten in Notenpunkte umgesetzt werden.

[1] Für jede Kompetenz, die bei der Bearbeitung der Teilaufgabe eine wesentliche Rolle spielt, ist der Anforderungsbereich (I, II oder III) eingetragen, in dem die Kompetenz benötigt wird.

[2] Das Bewertungsraster ist Teil des Dokuments „Beschreibung der Struktur", das auf den Internetseiten des IQB zum Download bereitsteht.