Gemeinsame Abituraufgabenpools der Länder

Pool für das Jahr 2017

Aufgabe für das Fach Mathematik

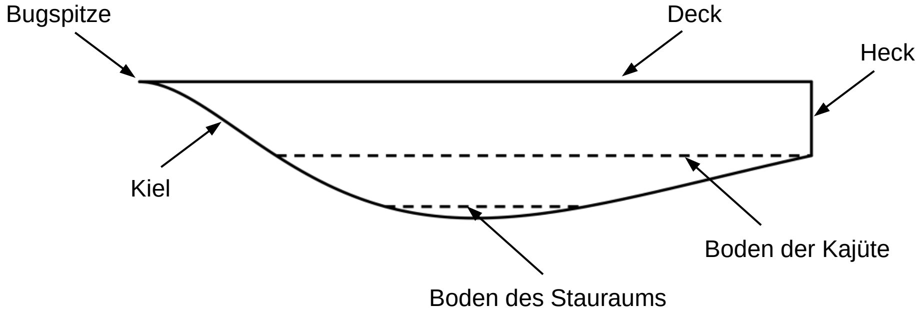
Kurzbeschreibung

Anforderungsniveau	Prüfungsteil	Sachgebiet	digitales Hilfsmittel
erhöht	B	Analysis	CAS

1 Aufgabe

	BE
Gegeben ist die Schar der in $\mathbb{R}$ definierten Funktionen $f_a: x \mapsto x^2 \cdot e^{-a \cdot x}$ mit $a \in \mathbb{R}^+$. Der Graph von f_a wird mit G_a bezeichnet.	
1 a Berechnen Sie denjenigen Wert von a, für den der Punkt $\left(1 \middle\vert \frac{1}{2}\right)$ auf G_a liegt.	2
b Bestimmen Sie die Koordinaten und die Art der Extrempunkte von G_a in Abhängigkeit von a. Begründen Sie, dass der Hochpunkt für jeden Wert von a im ersten Quadranten liegt, und beschreiben Sie, wie sich seine Lage mit dem Wert von a ändert. *(zur Kontrolle: Extremstellen von f_a: $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{2}{a}$)*	7
c Zeigen Sie, dass die Extrempunkte von G_a für alle Werte von a auf dem Graphen einer Funktion mit der Gleichung $y = \frac{x^2}{e^2}$ liegen.	2
d Für jeden Wert von b mit $b \in \mathbb{R}^+$ sind die Punkte $A(0\vert 0)$ und $B(b\vert 0)$ sowie der Punkt C gegeben, der die x-Koordinate b hat und auf dem Graphen $G_{0,2}$ liegt. Bestimmen Sie denjenigen Wert von b, für den der Flächeninhalt des Dreiecks ABC maximal ist, und geben Sie den zugehörigen Flächeninhalt an.	5
Der Graph G_a, die x-Achse und die Gerade mit der Gleichung $x = p$ mit $p \in \mathbb{R}^+$ schließen ein Flächenstück ein.	
e Berechnen Sie die Größe dieses Flächenstücks für $a = 0{,}2$. Zeigen Sie, dass der Inhalt des Flächenstücks auch für beliebig große Werte von p kleiner als 250 ist.	4

2 Die Abbildung zeigt schematisch einen Längsschnitt eines Schiffs, dessen Deck horizontal liegt.



Bei Verwendung eines Koordinatensystems, dessen Ursprung an der Bugspitze liegt und dessen x-Achse entlang der Decklinie verläuft, beschreibt die in IR definierte Funktion $k: x \mapsto -0{,}3x^2 \cdot e^{-0{,}2x}$ für $0 \le x \le 20$ modellhaft die abgebildete Kiellinie. Dabei entspricht eine Längeneinheit einem Meter in der Wirklichkeit.

a Es gilt $k(x) = -0{,}3 \cdot f_{0,2}(x)$. Beschreiben Sie, wie der Graph von k aus dem Graphen von $f_{0,2}$ hervorgeht. 2

b Berechnen Sie die Höhendifferenz in Metern zwischen dem tiefsten Punkt des Kiels und dem Endpunkt des Kiels am Heck. 4

c Der Kiel hat in einem Punkt seinen größten Neigungswinkel gegen die Horizontale. Bestimmen Sie die Größe dieses Neigungswinkels. 4

d Der horizontal liegende Boden der Kajüte liegt 2,20 m unterhalb des Decks. Berechnen Sie die Länge des Bodens in Metern in Längsrichtung des Schiffs. 4

e Der Boden des Stauraums unterhalb der Kajüte hat in Längsrichtung des Schiffs eine Länge von 6 m. Ermitteln Sie rechnerisch in Metern, wie weit der Boden des Stauraums unterhalb des Bodens der Kajüte liegt. 5

Der Endpunkt des Kiels am Heck wird im Modell durch den Punkt E dargestellt, die Bugspitze durch den Punkt B. Der Punkt $T(10 \mid k(10))$ ist der Tiefpunkt, der Punkt $P\left(10-5\sqrt{2} \mid k\left(10-5\sqrt{2}\right)\right)$ ein Wendepunkt des Graphen von k.

f Verbindet man die Punkte B, P, T und E in dieser Reihenfolge durch Strecken, so liefert die Summe der Längen dieser Strecken einen Näherungswert für die Länge der Kiellinie. Ermitteln Sie diesen Näherungswert. 4

(zur Kontrolle: Näherungswert: 21,0)

g Beschreiben Sie, wie man unter Verwendung von Streckenzügen zwischen Punkten auf dem Graphen von k einen beliebig genauen Wert für die Länge der Kiellinie erhalten kann. 3

h Ist ein Kurvenstück Graph einer in $[a;b]$ mit $a, b \in IR$ definierten Funktion h mit erster Ableitungsfunktion h', so gilt für die Länge s dieses Kurvenstücks: 4

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + \left(h'(x)\right)^2}\,dx$$

Berechnen Sie damit die Länge der Kiellinie im Modell.

Formulieren Sie eine allgemeine Aussage zur Länge der Kiellinie im Vergleich zur

Länge der in Teilaufgabe g verwendeten Streckenzüge. Begründen Sie diese Aussage.

50

2 Erwartungshorizont

Der Erwartungshorizont stellt für jede Teilaufgabe dar, in welchem Umfang und in welcher Form eine Lösung erwartet wird; nicht alle Lösungen sind dazu vollständig ausgeführt. Nicht dargestellte korrekte Lösungen sind als gleichwertig zu akzeptieren.

			BE
1	**a**	$f_a(1)=\frac{1}{2} \Leftrightarrow a=\ln 2$	2
	b	$f_a'(x)=0 \Leftrightarrow x=0 \vee x=\frac{2}{a}$, $f_a''(0)>0$, $f_a''\left(\frac{2}{a}\right)<0$ Damit: Tiefpunkt: $(0\,\vert\,0)$, Hochpunkt: $\left(\frac{2}{a}\,\vert\,\frac{4}{e^2a^2}\right)$ Der Hochpunkt liegt für jeden Wert von a im ersten Quadranten, da $\frac{2}{a}>0$ und $\frac{4}{e^2a^2}>0$ gilt. Er bewegt sich mit zunehmendem Wert von a in negative x-Richtung und in negative y-Richtung.	7
	c	Wegen $\frac{0^2}{e^2}=0$ und $\frac{\left(\frac{2}{a}\right)^2}{e^2}=\frac{4}{e^2a^2}$ liegen für jeden Wert von a Tiefpunkt und Hochpunkt von G_a auf dem gegebenen Graphen.	2
	d	Der Flächeninhalt des Dreiecks lässt sich in Abhängigkeit von b durch eine Funktion A mit $A(b)=\frac{1}{2}b\cdot f_{0,2}(b)$ beschreiben. Die Funktion A nimmt für $b=15$ ihren größten Wert an; der größte Wert ist $\frac{3375}{2e^3}$.	5
	e	$f_{0,2}(x)\geq 0$, $p\in IR^+$ Damit ergibt sich für den Flächeninhalt: $\int_0^p f_{0,2}(x)\,dx=250-5\cdot\left(p^2+10p+50\right)\cdot e^{-\frac{p}{5}}$ Da $p^2+10p+50>0$ und $e^{-\frac{p}{5}}>0$ für alle $p\in IR^+$, gilt $\int_0^p f_{0,2}(x)\,dx<250$.	4
2	**a**	Der Graph von k geht aus dem Graphen von f_2 durch eine Stauchung mit dem Faktor 0,3 in y-Richtung und eine Spiegelung an der x-Achse hervor.	2
	b	Der tiefste Punkt der Kiellinie hat die x-Koordinate 10. $k(20)-k(10)\approx 1{,}86$, d. h. die Höhendifferenz beträgt etwa 1,86 m.	4
	c	Der Abbildung ist zu entnehmen, dass der gesuchte Punkt zwischen Bugspitze und tiefstem Punkt liegt. Für $0<x<10$ gilt: $k''(x)=0 \Leftrightarrow x=10-5\sqrt{2}$ $\tan\alpha=k'\left(10-5\sqrt{2}\right)$, d. h. $\alpha\approx -34{,}7°$ Die Größe des Neigungswinkels beträgt etwa 34,7°.	4

d	Für $0 \le x \le 20$ liefert $k(x) = -2{,}2$: $x \approx 4{,}07$ sowie $x \approx 19{,}99$ Der Boden ist also etwa 15,9 m lang.	4
e	Für $0 \le x \le 20$ liefert $k(x) = k(x+6)$: $x \approx 7{,}30$ $k(7{,}30) \approx -3{,}7$ Damit liegt der Boden des Stauraums etwa 1,5 m unterhalb des Bodens der Kajüte.	5
f	$\sqrt{\left(10-5\sqrt{2}\right)^2+\left(f\left(10-5\sqrt{2}\right)\right)^2}+\sqrt{\left(10-\left(10-5\sqrt{2}\right)\right)^2+\left(f(10)-f\left(10-5\sqrt{2}\right)\right)^2}$ $+\sqrt{(20-10)^2+\left(f(20)-f(10)\right)^2} \approx 21{,}0$	4
g	Man teilt das Intervall von $x_0 = 0$ bis $x_n = 20$ durch x_1, x_2, …, x_{n-1} mit $n \in \mathbb{N}$ in n gleichgroße Teile und verbindet die Punkte des Graphen von k mit den x-Koordinaten x_0, x_1, … und x_n durch Strecken. Die Summe der Längen dieser Strecken stimmt mit der Länge der Kiellinie beliebig genau überein, wenn die Werte von n hinreichend groß sind.	3
h	$\int_0^{20} \sqrt{1+\left(k'(x)\right)^2}\,dx \approx 21{,}2 > 21{,}0$ Die Länge der Kiellinie ist stets größer als die Länge eines der betrachteten Streckenzüge, da jede Strecke des Streckenzugs kürzer ist als das Stück des Graphen von k zwischen ihren beiden Endpunkten.	4
		50

3 Standardbezug

Teilaufg.	BE	Leitideen					allgemeine mathematische Kompetenzen[1]						Anforderungsbereich		
		L1	L2	L3	L4	L5	K1	K2	K3	K4	K5	K6	I	II	III
1 a	2	X			X			I			I		X		
b	7	X		X	X		I				I	I	X		
c	2				X		II	II			I			X	
d	5		X	X	X			II			II			X	
e	4		X	X	X		III	II			II				X
2 a	2			X	X		I			I		I	X		
b	4		X	X	X			II	I		I			X	
c	4	X	X	X	X				I		II	I		X	
d	4	X	X	X	X			II	II			I		X	
e	5	X	X	X	X			III	II		II				X
f	4		X	X	X						II	I		X	
g	3	X	X	X	X		II	III				III			X
h	4		X	X	X		III				II	II			X

[1] Für jede Kompetenz, die bei der Bearbeitung der Teilaufgabe eine wesentliche Rolle spielt, ist der Anforderungsbereich (I, II oder III) eingetragen, in dem die Kompetenz benötigt wird.

4 Bewertungshinweise

Die Bewertung der erbrachten Prüfungsleistungen hat sich für jede Teilaufgabe nach der am rechten Rand der Aufgabenstellung angegebenen Anzahl maximal erreichbarer Bewertungseinheiten (BE) zu richten.

Für die Bewertung der Gesamtleistung eines Prüflings ist passend zur Konzeption der Aufgaben der Aufgabensammlung und des Abituraufgabenpools ein Bewertungsraster[2] vorgesehen, das angibt, wie die in den Prüfungsteilen A und B insgesamt erreichten Bewertungseinheiten in Notenpunkte umgesetzt werden.

[2] Das Bewertungsraster ist Teil des Dokuments „Beschreibung der Struktur“, das auf den Internetseiten des IQB zum Download bereitsteht.