Gemeinsame Abituraufgabenpools der Länder

Beispielaufgaben

Aufgabe für das Fach Mathematik

Kurzbeschreibung

Anforderungsniveau	Prüfungsteil	Sachgebiet[1]	digitales Hilfsmittel
grundlegend	B	Analysis	CAS

1 Aufgabe

BE

BMX-Fahrräder sind speziell für das Gelände ausgelegte Sportgeräte. Für den professionellen Einsatz dieser Fahrräder wird auf horizontalem Untergrund eine 3 m breite Sprungschanze installiert. Im Längsschnitt der Schanze kann deren Profillinie für $x \in [-8;0]$ modellhaft durch die in IR definierte Funktion f mit $f(x) = -\frac{5}{256}x^3 + \frac{3}{4}x + 2$ beschrieben werden. Abbildung 1 zeigt den zugehörigen Teil des Graphen von f.

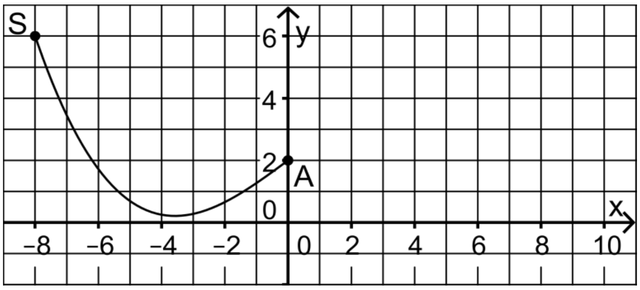


Abb. 1

Der Startpunkt, von dem aus die Schanze durchfahren wird, wird durch den Punkt $S(-8 \mid f(-8))$ dargestellt, der Absprungpunkt durch $A(0 \mid f(0))$. Der Untergrund wird im Längsschnitt durch die x-Achse beschrieben; eine Längeneinheit im Koordinatensystem entspricht 1 m in der Wirklichkeit.

a Berechnen Sie die Koordinaten des Punkts, der im Modell den tiefsten Punkt der Schanze darstellt. Bestimmen Sie rechnerisch die Höhendifferenz zwischen dem höchsten und dem tiefsten Punkt der Schanze. 4

[1] verwendete Abkürzungen: AG/LA - Analytische Geometrie/Lineare Algebra, AG/LA (A1) - Analytische Geometrie/Lineare Algebra (Alternative A1), AG/LA (A2) - Analytische Geometrie/Lineare Algebra (Alternative A2)

b Veranschaulichen Sie in Abbildung 1 die mittlere Steigung der Schanze zwischen Startpunkt und Absprungpunkt. Bestimmen Sie diese Steigung. 4

c Bestimmen Sie die Größe des Winkels, den die Schanze im Startpunkt mit der Horizontalen einschließt. 3

Abbildung 2 zeigt grau markiert eine Seite der Schanze, die vollständig mit einer ebenen Verkleidung versehen ist. Die beiden seitlichen Kanten der Verkleidung stehen senkrecht zum Untergrund, der obere Rand der Verkleidung hat die Form der Profillinie.

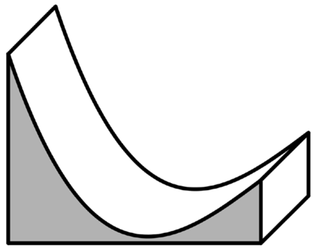


Abb. 2

d Zur Stabilisierung der Verkleidung soll an der entsprechenden Seite der Schanze eine dünne Stahlschiene so angebracht werden, dass sie von einem Punkt des oberen Rands bis zu der in Abbildung 2 unteren rechten Ecke der Verkleidung reicht. Ermitteln Sie rechnerisch, wie lang diese Stahlschiene mindestens sein muss. 5

e Derjenige Teil der Verkleidung, der mindestens zwei Meter über dem Untergrund liegt, dient einer Firma als Werbefläche. Bestimmen Sie den Anteil dieser Werbefläche an der Gesamtfläche der Verkleidung. 6

An die Schanze soll sich ein für die Landung geeigneter Hügel aus Erde anschließen. Mögliche Profillinien dieses Hügels werden im Modell für $x \geq 0$ durch Graphen der Funktionen g_a mit $g_a(x) = x \cdot e^{-a \cdot x^2}$ und $a \in \mathbb{R}^+$ beschrieben.

f Der Parameter a durchläuft die Werte von 0,01 bis 0,05. Beschreiben Sie, wie sich dabei die Lage des Hochpunkts des Graphen von g_a ändert. 2

g Bestimmen Sie rechnerisch denjenigen Wert von a, für den der höchste Punkt des Hügels auf der gleichen Höhe wie der Absprungpunkt der Schanze liegt. 4

Für die Profillinie des Hügels wird $a = \frac{1}{24}$ gewählt.

h Die Profillinie des Hügels fällt – in Bewegungsrichtung der Sportler betrachtet – in einem Punkt am stärksten ab. Beschreiben Sie, wie die Koordinaten des entsprechenden Punkts im Modell rechnerisch ermittelt werden können. 3

i Skizzieren Sie den Graphen von $g_{\frac{1}{24}}$ in Abbildung 1. 2

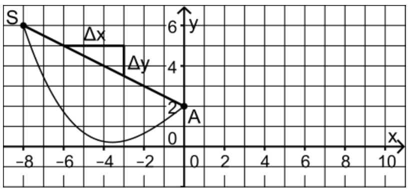
Die Flugbahnen der Sportler nach dem Absprung lassen sich im Modell vereinfachend mithilfe quadratischer Funktionen beschreiben, deren Graphen im Punkt A ohne Knick an den Graphen von f anschließen.

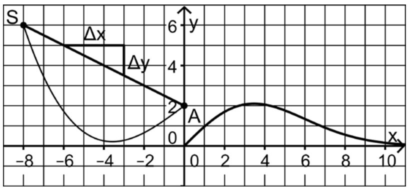
j Zeigen Sie, dass jede solche Funktion eine Gleichung der Form $y = b \cdot x^2 + \frac{3}{4} \cdot x + 2$ mit $b \in \mathbb{R}$ hat. 3

k	Ein Sportler landet nach dem Absprung von der Schanze auf dem Hügel und erreicht dabei eine horizontal gemessene Sprungweite von 6 m. Bestimmen Sie auf der Grundlage des Modells die größte Höhe, die der Sportler während der Flugphase gegenüber dem Absprungpunkt erreicht.	4
		40

2 Erwartungshorizont

Der Erwartungshorizont stellt für jede Teilaufgabe dar, in welchem Umfang und in welcher Form eine Lösung erwartet wird; nicht alle Lösungen sind dazu vollständig ausgeführt. Nicht dargestellte korrekte Lösungen sind als gleichwertig zu akzeptieren.

		BE
a	Abbildung 1 ist zu entnehmen, dass der tiefste Punkt der Schanze zwischen Startpunkt und Absprungpunkt liegt; der höchste Punkt ist der Startpunkt. Für $x \in]-8;0[$ gilt: $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{8}{5}\sqrt{5}$ $y = f\left(-\frac{8}{5}\sqrt{5}\right) = 2 - \frac{4}{5}\sqrt{5}$ Mit $f(-8) = 6$ ergibt sich als Höhendifferenz etwa 5,8 m.	4
b	 $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(0) - f(-8)}{8} = -\frac{1}{2}$	4
c	Mit $f'(-8) = -3$ ergibt sich: $\tan\alpha = -3$, d. h. $\alpha \approx -71{,}6°$ Die Größe des Winkels, den die Schanze im Startpunkt mit der Horizontalen einschließt, beträgt etwa 71,6°.	3
d	Der Abstand der unteren rechten Ecke von einem Punkt des oberen Rands lässt sich in Abhängigkeit von der x-Koordinate dieses Punkts durch eine Funktion d mit $d(x) = \sqrt{x^2 + f(x)^2}$ beschreiben. Für $x \in [-8;0]$ nimmt d bei $x \approx -0{,}925$ seinen kleinsten Wert an; der kleinste Wert ist etwa 1,61. Die Stahlschiene muss also mindestens 1,61 m lang sein.	5
e	Für $x \in [-8;0]$ gilt: $f(x) = 2 \Leftrightarrow x = -\frac{8\sqrt{15}}{5} \vee x = 0$ $\int_{-8}^{-\frac{8\sqrt{15}}{5}} (f(x) - 2)\,dx = 3{,}2$; $\int_{-8}^{0} f(x)\,dx = 12$ Damit: $\frac{3{,}2}{12} = \frac{4}{15}$	6
f	Mit zunehmendem Wert von a bewegt sich der Hochpunkt in negative x-Richtung und in negative y-Richtung.	2

g	Für $x \geq 0$ gilt: $g'_a(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{\sqrt{2a}}$ $g_a\left(\frac{1}{\sqrt{2a}}\right) = 2 \Leftrightarrow a = \frac{1}{8e}$	4
h	Der entsprechende Punkt im Modell ist der Wendepunkt des Graphen von $g_{\frac{1}{24}}$ im ersten Quadranten. Die zugehörige x-Koordinate ist die Lösung der Gleichung $g''_{\frac{1}{24}}(x) = 0$ für $x > 0$. Die zugehörige y-Koordinate erhält man mithilfe des Funktionsterms von $g_{\frac{1}{24}}$.	3
i		2
j	Die Funktionen haben Gleichungen der Form $y = bx^2 + cx + d$ mit $b, c, d \in \mathbb{R}$. Bezeichnet man die Funktionen mit h_b, so ergibt sich mit $h_b(0) = f(0)$ und $h'_b(0) = f'(0)$: $c = \frac{3}{4}$, $d = 2$	3
k	$h_b(6) = g_{\frac{1}{24}}(6)$ liefert $b \approx -0{,}143$. Die Funktion $h_{-0{,}143}$ hat einen größten Wert von etwa 2,98, d. h. die größte Höhe gegenüber dem Absprungpunkt beträgt etwa 1 m.	4
		40

3 Standardbezug

Teilaufgabe	BE	allgemeine mathematische Kompetenzen[2]						Anforderungsbereich		
		K1	K2	K3	K4	K5	K6	I	II	III
a	4	I		I		I		X		
b	4			I	I	I		X		
c	3			I		I		X		
d	5		III	III			II			X
e	6		II	II		II			X	
f	2				II		I		X	
g	4		III	II		II				X
h	3	II		I			II		X	
i	2				I			X		
j	3	II	II			II			X	
k	4		II	II		II			X	

[2] Für jede Kompetenz, die bei der Bearbeitung der Teilaufgabe eine wesentliche Rolle spielt, ist der Anforderungsbereich (I, II oder III) eingetragen, in dem die Kompetenz benötigt wird.

4 Bewertungshinweise

Die Bewertung der erbrachten Prüfungsleistungen hat sich für jede Teilaufgabe nach der am rechten Rand der Aufgabenstellung angegebenen Anzahl maximal erreichbarer Bewertungseinheiten (BE) zu richten.

Für die Bewertung der Gesamtleistung eines Prüflings ist ein Bewertungsraster[3] vorgesehen, das angibt, wie die in den Prüfungsteilen A und B insgesamt erreichten Bewertungseinheiten in Notenpunkte umgesetzt werden.

[3] Das Bewertungsraster ist Teil des Dokuments „Beschreibung der Struktur“, das auf den Internetseiten des IQB zum Download bereitsteht.