Gemeinsame Abituraufgabenpools der Länder

Beispielaufgaben

Aufgabe für das Fach Mathematik

Kurzbeschreibung

Anforderungsniveau	Prüfungsteil	Sachgebiet[1]	digitales Hilfsmittel
erhöht	B	Analysis	WTR

1 Aufgabe

BE

1 Gegeben ist die Funktion f mit $f(x)=\frac{1}{4}x^3-3x^2+9x-5$ und Definitionsmenge IR. Abbildung 1 zeigt den Graphen G_f von f.

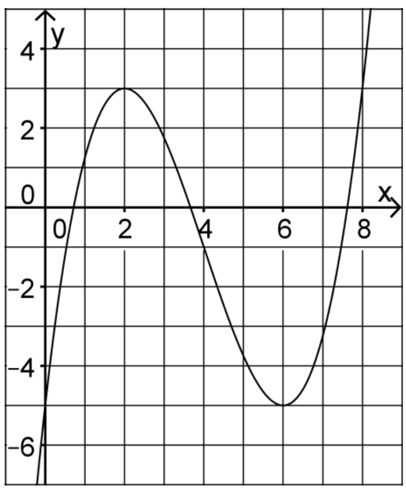


Abb. 1

a Bestimmen Sie rechnerisch die Koordinaten und die Art der Extrempunkte von G_f. 5

b Betrachtet wird die Gleichung $f(x)=c$ mit $c\in IR$. Ermitteln Sie mithilfe von Abbildung 1 die Anzahl der Lösungen dieser Gleichung in Abhängigkeit von c. 4

Durch Verschiebung von G_f um 4 in negative x-Richtung und um 1 in positive y-Richtung entsteht der Graph einer Funktion g.

c Geben Sie einen Term von g an, an dem man diese Verschiebung erkennen kann. 2

d Ein vereinfachter Term von g ist $g(x)=\frac{1}{4}x^3-3x$. Begründen Sie mithilfe der Funk- 3

[1] verwendete Abkürzungen: AG/LA - Analytische Geometrie/Lineare Algebra, AG/LA (A1) - Analytische Geometrie/Lineare Algebra (Alternative A1), AG/LA (A2) - Analytische Geometrie/Lineare Algebra (Alternative A2)

tion g, dass der Graph von f symmetrisch bezüglich des Punkts $(4\,|\,-1)$ ist.

e Bestätigen Sie rechnerisch, dass $\int_1^3 f(x)\,dx = 5$ gilt. 3

f Bestimmen Sie rechnerisch ohne Verwendung einer Stammfunktion den Wert des Integrals $\int_5^7 f(x)\,dx$ und veranschaulichen Sie Ihr Vorgehen durch geeignete Eintragungen in Abbildung 1. 5

Die Funktion f gehört zur Schar der in $\mathbb{R}$ definierten Funktionen f_a mit $f_a(x) = \frac{1}{4}x^3 - 3x^2 + ax - 5$ und $a \in \mathbb{R}$. Der Graph von f_a wird mit G_a bezeichnet.

g Bestimmen Sie die Koordinaten des Wendepunkts von G_a. 3

h Die Wendepunkte aller Graphen G_a liegen auf einer zur y-Achse parallelen Gerade. Begründen Sie, dass man dies am Term von f_a erkennen kann. 2

i Ermitteln Sie die Koordinaten des Punkts, durch den alle Graphen der Schar verlaufen. Bestimmen Sie den Wert von a so, dass sich die Graphen G_a und G_3 in diesem Punkt senkrecht schneiden. 5

j Untersuchen Sie rechnerisch, für welche Werte von a der Graph G_a keinen Punkt besitzt, in dem die Tangente parallel zur x-Achse verläuft. 4

2 Eine vertikal stehende Getränkedose hat die Form eines geraden Zylinders. Die Lage des gemeinsamen Schwerpunkts S von Dose und enthaltener Flüssigkeit hängt von der Füllhöhe der Flüssigkeit über dem Dosenboden ab. Ist die Dose vollständig gefüllt, so beträgt die Füllhöhe 15 cm (vgl. Abbildung 2).

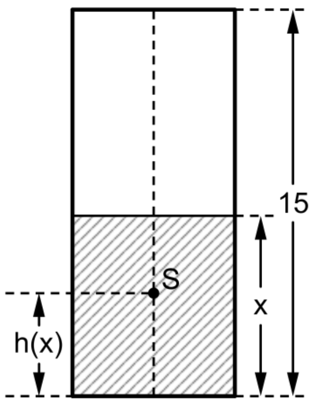


Abb. 2

Abbildung 3 zeigt den Graphen G_h der Funktion h, die für $0 \le x \le 15$ die Höhe des Schwerpunkts S über dem Dosenboden in Zentimetern angibt; dabei ist x die Füllhöhe in Zentimetern. G_h hat den Tiefpunkt $(3\,|\,3)$.

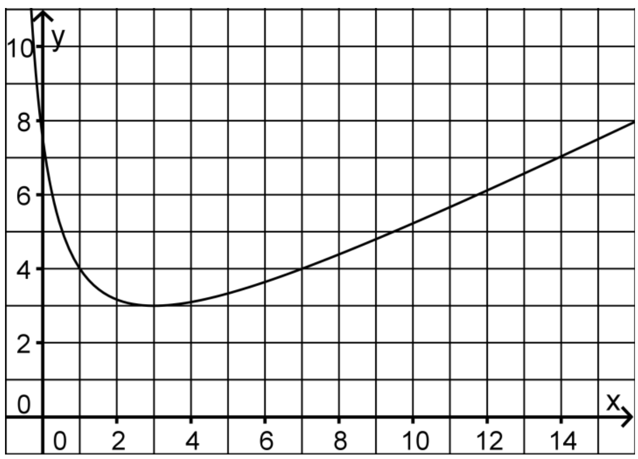


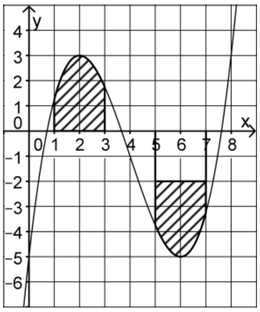
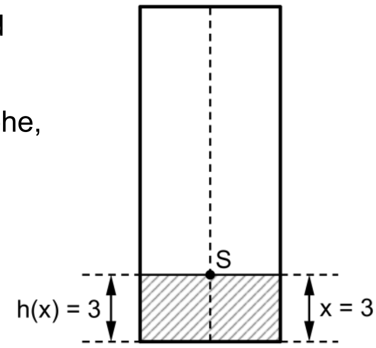
Abb. 3

a	Ermitteln Sie grafisch die Füllhöhen, bei denen der Schwerpunkt auf halber Höhe der Dose liegt.	2
b	Die zunächst leere Dose wird langsam mit Flüssigkeit gefüllt, bis die maximale Füllhöhe von 15 cm erreicht ist. Beschreiben Sie die Bewegung des Schwerpunkts S während des Füllvorgangs. Stellen Sie für den Moment, in dem sich der Schwerpunkt in seiner geringsten Höhe befindet, Dose, Füllhöhe und Schwerpunkt schematisch dar und beschreiben Sie die Besonderheit dieser Situation.	4
c	Für die Funktion h gilt $h(x)=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}+\frac{8}{x+1}$. Bestimmen Sie rechnerisch die Füllhöhen, bei denen der Schwerpunkt 4 cm über dem Dosenboden liegt.	4
d	Nun wird eine andere vertikal stehende Dose betrachtet, die ebenfalls die Form eines geraden Zylinders hat. Sowohl bei leerer als auch bei vollständig gefüllter Dose liegt der gemeinsame Schwerpunkt von Dose und enthaltener Flüssigkeit genau in der Mitte der Dose. Ist diese Dose vollständig gefüllt, so beträgt die Füllhöhe 11 cm. Die Höhe des Schwerpunkts wird durch eine Funktion k mit $k(x)=\frac{1}{2}x+s+\frac{t}{x+1}$ mit $s,t\in\mathbb{R}$ beschrieben. Bestimmen Sie die passenden Werte von s und t.	4
		50

2 Erwartungshorizont

Der Erwartungshorizont stellt für jede Teilaufgabe dar, in welchem Umfang und in welcher Form eine Lösung erwartet wird; nicht alle Lösungen sind dazu vollständig ausgeführt. Nicht dargestellte korrekte Lösungen sind als gleichwertig zu akzeptieren.

			BE
1	**a**	$f'(x)=\frac{3}{4}x^2-6x+9$, $f'(x)=0 \Leftrightarrow x=2 \vee x=6$ Vorzeichenbetrachtung von $f'(x)$ führt zu: Hochpunkt: $(2\,\vert\,3)$, Tiefpunkt: $(6\,\vert\,-5)$	5
	b	Die Gleichung besitzt für $c<-5$ und für $c>3$ jeweils genau eine Lösung, für $c=-5$ und für $c=3$ jeweils genau zwei Lösungen und für $-5<c<3$ genau drei Lösungen.	4
	c	$g(x)=\left[\frac{1}{4}\cdot(x+4)^3-3\cdot(x+4)^2+9\cdot(x+4)-5\right]+1$	2
	d	Der angegebene Term von g enthält nur Potenzen von x mit ungeradem Exponenten; der Graph von g ist damit symmetrisch bezüglich des Koordinatenursprungs. G_f geht aus dem Graphen von g durch Verschiebung um 4 in positive x-Richtung und um 1 in negative y-Richtung hervor und ist damit symmetrisch bezüglich des Punkts $(4\,\vert\,-1)$.	3
	e	$\int_1^3 f(x)\,dx=\left[\frac{1}{16}x^4-x^3+\frac{9}{2}x^2-5x\right]_1^3=5$	3

	f	$\int_5^7 f(x)\,dx = -\left(\int_1^3 f(x)\,dx + 2\cdot 2\right) = -9$ 	5
	g	$f_a'(x) = \frac{3}{4}x^2 - 6x + a$, $f_a''(x) = \frac{3}{2}x - 6$, $f_a''(x) = 0 \Leftrightarrow x = 4$ Wendepunkt: $(4 \mid 4a - 37)$	3
	h	Der Parameter a ist im Funktionsterm von f_a nur im Summanden ax enthalten, tritt im Term der zweiten Ableitung von f_a also nicht auf. Damit ist die x-Koordinate des Wendepunkts von G_a unabhängig von a.	2
	i	Für $a_1 \neq a_2$ gilt: $f_{a_1}(x) = f_{a_2}(x) \Leftrightarrow a_1 \cdot x = a_2 \cdot x \Leftrightarrow x = 0$ Damit verlaufen alle Graphen der Schar durch den Punkt $(0 \mid -5)$. $f_a'(0) = -\frac{1}{f_3'(0)} \Leftrightarrow a = -\frac{1}{3}$	5
	j	$f_a'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{3}{4}x^2 - 6x + a = 0$ Betrachtung der Diskriminante: $(-6)^2 - 4\cdot\frac{3}{4}\cdot a < 0 \Leftrightarrow a > 12$	4
2	a	Als Lösungen der Gleichung $h(x) = 7{,}5$ lassen sich der Abbildung 3 näherungsweise $x = 0$ und $x = 15$ entnehmen. Damit liegt der Schwerpunkt bei den Füllhöhen 0 cm und 15 cm jeweils auf halber Höhe der Dose.	2
	b	Die Höhe des Schwerpunkts S nimmt zunächst ab und steigt dann wieder bis zum Ausgangswert an. Befindet sich der Schwerpunkt in seiner geringsten Höhe, so liegt er auf der Oberfläche der Flüssigkeit. 	4
	c	$h(x) = 4 \Leftrightarrow x^2 - 8x + 7 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \vee x = 7$ Bei den Füllhöhen 1 cm und 7 cm liegt der Schwerpunkt jeweils 4 cm über dem Dosenboden.	4
	d	$k(0) = 5{,}5 \Leftrightarrow s + t = 5{,}5$; $k(11) = 5{,}5 \Leftrightarrow s + \frac{t}{12} = 0$ Damit: $s = -\frac{1}{2}$, $t = 6$	4
			50

3 Standardbezug

Teilaufgabe	BE	allgemeine mathematische Kompetenzen[2]						Anforderungsbereich		
		K1	K2	K3	K4	K5	K6	I	II	III
1 a	5	I				I		X		
b	4	II	II		II				X	
c	2				II	II			X	
d	3	III	III				II			X
e	3					I		X		
f	5	III	III		II					X
g	3					I		X		
h	2	II					II		X	
i	5		II			II			X	
j	4		II			III				X
2 a	2			I	II		II		X	
b	4			II	II		II		X	
c	4			I		II			X	
d	4		II	III		II				X

4 Bewertungshinweise

Die Bewertung der erbrachten Prüfungsleistungen hat sich für jede Teilaufgabe nach der am rechten Rand der Aufgabenstellung angegebenen Anzahl maximal erreichbarer Bewertungseinheiten (BE) zu richten.

Für die Bewertung der Gesamtleistung eines Prüflings ist ein Bewertungsraster[3] vorgesehen, das angibt, wie die in den Prüfungsteilen A und B insgesamt erreichten Bewertungseinheiten in Notenpunkte umgesetzt werden.

[2] Für jede Kompetenz, die bei der Bearbeitung der Teilaufgabe eine wesentliche Rolle spielt, ist der Anforderungsbereich (I, II oder III) eingetragen, in dem die Kompetenz benötigt wird.

[3] Das Bewertungsraster ist Teil des Dokuments „Beschreibung der Struktur“, das auf den Internetseiten des IQB zum Download bereitsteht.