Gemeinsame Abituraufgabenpools der Länder

Beispielaufgaben

Aufgabe für das Fach Mathematik

Kurzbeschreibung

Anforderungsniveau	Prüfungsteil	Sachgebiet[1]	digitales Hilfsmittel
erhöht	B	Analysis	CAS

1 Aufgabe

	BE
Gegeben ist die Schar der in IR definierten Funktionen $f_a : x \mapsto -\frac{1}{3a^2}x^3 + \frac{5}{4}x + 2$ mit $a \in \mathbb{R}^+$. Die zugehörigen Graphen werden mit G_a bezeichnet.	
1 a Der Parameter a durchläuft die Werte von 0,5 bis 5. Beschreiben Sie, wie sich dabei die Lage der Extrempunkte von G_a ändert.	3
b Weisen Sie nach, dass alle Graphen G_a einen gemeinsamen Punkt und in diesem Punkt die gleiche Steigung haben. Geben Sie die Gleichung der Tangente an die Graphen in diesem Punkt an.	4
c Bestimmen Sie die Koordinaten und die Art der Extrempunkte von G_a. *(zur Kontrolle: Koordinaten des Tiefpunkts: $(-\frac{\sqrt{5}}{2}a \mid 2-\frac{5\sqrt{5}}{12}a)$)*	4
d Untersuchen Sie mithilfe der Lage des Tiefpunkts von G_a, wie die Anzahl der Nullstellen von f_a vom Wert des Parameters a abhängt.	4
e Zeichnen Sie den Graphen $G_{3,6}$ für $-8 \le x \le 8$ in ein Koordinatensystem ein.	3

[1] verwendete Abkürzungen: AG/LA - Analytische Geometrie/Lineare Algebra, AG/LA (A1) - Analytische Geometrie/Lineare Algebra (Alternative A1), AG/LA (A2) - Analytische Geometrie/Lineare Algebra (Alternative A2)

f Es gibt zwei Strecken der Länge 2, die parallel zur x-Achse verlaufen und deren jeweilige Endpunkte auf $G_{3,6}$ liegen. Zeichnen Sie diese beiden Strecken in Ihre Zeichnung aus Teilaufgabe 1e ein. Beschreiben Sie, wie die x-Koordinaten der Endpunkte beider Strecken rechnerisch ermittelt werden können. 3

2 BMX-Fahrräder sind speziell für das Gelände ausgelegte Sportgeräte. Für den professionellen Einsatz dieser Fahrräder soll auf horizontalem Untergrund eine 3 m breite Sprungschanze installiert werden. Im Längsschnitt der Schanze kann deren Profillinie für $x \in [-8;0]$ modellhaft durch eine der Funktionen f_a beschrieben werden. Der Startpunkt, von dem aus die Schanze durchfahren wird, wird durch den Punkt $S_a\left(-8 \mid f_a(-8)\right)$ dargestellt, der Absprungpunkt durch $A_a\left(0 \mid f_a(0)\right)$. Der Untergrund wird im Längsschnitt durch die x-Achse beschrieben; eine Längeneinheit im Koordinatensystem entspricht 1 m in der Wirklichkeit.

a Ermitteln Sie alle Werte von a, für die die beiden folgenden Bedingungen erfüllt sind: 5

- Der Startpunkt liegt mindestens so hoch wie der Absprungpunkt.
- Die Schanze schließt im Startpunkt mit der Horizontalen einen Winkel mit einer Größe von höchstens 75° ein.

b Geben Sie für jeden der folgenden Terme die Bedeutung im Sachzusammenhang an: 3

I $\dfrac{f_a(0)-f_a(-8)}{0-(-8)}$ II $\lim\limits_{x\to-8}\dfrac{f_a(x)-f_a(-8)}{x-(-8)}$ III $\frac{1}{8}\cdot\int\limits_{-8}^{0} f_a'(t)\,dt$

Für die Schanze wurde $a = 3{,}6$ gewählt. An die Schanze schließen sich aufeinanderfolgende Hügel aus Erde an. Die Profillinie dieser Hügel wird im Modell für $x \geq 0$ durch die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion $g: x \mapsto \frac{5}{4}\cdot\sin\left(\frac{\pi}{6}x\right)+\frac{3}{2}$ beschrieben. Im Modell wird von senkrechten Seitenflächen der Hügel ausgegangen, die jeweils durch eine Böschung gestützt werden; dazwischen beträgt die Breite der Hügel 4 m.

c Beschreiben Sie, wie der Graph von g aus dem Graphen der in $\mathbb{R}$ definierten Funktion $x \mapsto \sin(x)$ hervorgeht. 3

d Begründen Sie, dass g den Wertebereich $\left[\frac{1}{4};\frac{11}{4}\right]$ besitzt. 2

e Für das Anlegen der Hügel auf dem Untergrund wurden insgesamt 180 Kubikmeter Erde verwendet, insgesamt ein Viertel davon für die beiden Böschungen. Berechnen Sie, wie weit sich die Hügel in Längsrichtung erstrecken. 4

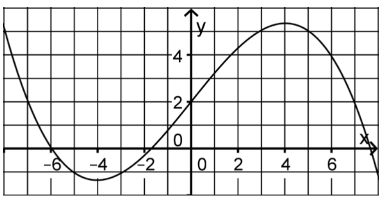
Die Flugbahnen der Sportler nach dem Absprung lassen sich im Modell vereinfachend mithilfe quadratischer Funktionen beschreiben, deren Graphen im Punkt A ohne Knick an den Graphen von $f_{3,6}$ anschließen.

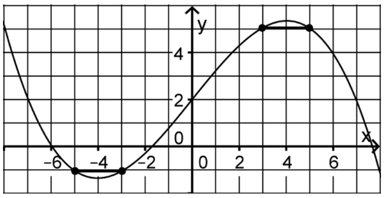
f Zeigen Sie, dass jede solche Funktion eine Gleichung der Form $y = b\cdot x^2+\frac{5}{4}\cdot x+2$ mit $b \in \mathbb{R}$ hat. Begründen Sie im Sachzusammenhang, dass für b nur negative Zahlen infrage kommen. 4

g	Für einen Sprung eines Sportlers ist $b=-\frac{1}{4}$. Ermitteln Sie auf der Grundlage des Modells die größte Höhe, die der Sportler während der Flugphase gegenüber dem Hügel erreicht.	3
h	Bei einem zweiten Sprung erreicht der Sportler eine Höhe von 1,5 m gegenüber dem Absprungpunkt und landet anschließend auf einem der Hügel. Bestimmen Sie auf der Grundlage des Modells die horizontal gemessene Sprungweite.	5
		50

2 Erwartungshorizont

Der Erwartungshorizont stellt für jede Teilaufgabe dar, in welchem Umfang und in welcher Form eine Lösung erwartet wird; nicht alle Lösungen sind dazu vollständig ausgeführt. Nicht dargestellte korrekte Lösungen sind als gleichwertig zu akzeptieren.

		BE
1 a	Mit zunehmendem Wert von a bewegt sich der Hochpunkt in positive x-Richtung und in positive y-Richtung, der Tiefpunkt in negative x-Richtung und in negative y-Richtung.	3
b	Da $f_a(0)=2$ für alle $a\in \mathrm{IR}^+$, verlaufen alle Graphen der Schar durch den Punkt $(0\,\vert\,2)$. Da $f_a'(0)=\frac{5}{4}$ für alle $a\in \mathrm{IR}^+$, haben alle Graphen der Schar in diesem Punkt die gleiche Steigung. Gleichung der Tangente: $y=\frac{5}{4}x+2$	4
c	$f_a'(x)=0 \Leftrightarrow x=-\frac{\sqrt{5}}{2}a \vee x=\frac{\sqrt{5}}{2}a$, $f_a''\left(-\frac{\sqrt{5}}{2}a\right)=\frac{\sqrt{5}}{a}>0$, $f_a''\left(\frac{\sqrt{5}}{2}a\right)=-\frac{\sqrt{5}}{a}<0$ Damit: Tiefpunkt: $\left(-\frac{\sqrt{5}}{2}a\,\vert\,2-\frac{5\sqrt{5}}{12}a\right)$, Hochpunkt: $\left(\frac{\sqrt{5}}{2}a\,\vert\,2+\frac{5\sqrt{5}}{12}a\right)$	4
d	Liegt der Tiefpunkt von G_a auf der x-Achse, hat f_a genau zwei Nullstellen. Für den zugehörigen Wert von a gilt: $2-\frac{5\sqrt{5}}{12}a=0 \Leftrightarrow a=\frac{24}{25}\sqrt{5}$ Ist der Wert von a kleiner, liegt der Tiefpunkt oberhalb der x-Achse, f_a hat genau eine Nullstelle. Ist der Wert von a größer, liegt der Tiefpunkt unterhalb der x-Achse, f_a hat genau drei Nullstellen.	4
e		3

f	 Die Gleichung $f(x)=f(x+2)$ liefert die x-Koordinaten jeweils eines Endpunkts der beiden Strecken. Für jede Strecke ergibt sich daraus die x-Koordinate des anderen Endpunkts durch Addition von 2.	3
2 a	$f_a(-8) \geq 2 \Leftrightarrow a \leq \frac{16\sqrt{15}}{15}$ $\lvert f_a'(-8)\rvert \leq \lvert\tan(-75°)\rvert \Leftrightarrow a \geq \frac{32\sqrt{3}-16}{11}$ Damit muss a zwischen etwa 3,58 und etwa 4,13 liegen.	5
b	I: mittlere Steigung der Schanze zwischen Startpunkt und Absprungpunkt II: Steigung der Schanze im Startpunkt III: mittlere Steigung der Schanze zwischen Startpunkt und Absprungpunkt	3
c	Der Graph von g geht – unter Beachtung der Reihenfolge – aus dem Graphen zu $x \mapsto \sin(x)$ hervor durch: 1. Streckung mit dem Faktor $\frac{6}{\pi}$ in x-Richtung 2. Streckung mit dem Faktor $\frac{5}{4}$ in y-Richtung 3. Verschiebung um $\frac{3}{2}$ in positive y-Richtung	3
d	Der Term $\sin\left(\frac{\pi}{6}x\right)$ nimmt alle Werte von -1 bis 1 an. Daher nimmt g alle Werte von $\frac{5}{4}\cdot(-1)+\frac{3}{2}$ bis $\frac{5}{4}\cdot 1+\frac{3}{2}$, d. h. von $\frac{1}{4}$ bis $\frac{11}{4}$ an.	2
e	$4\cdot\int_0^s g(x)\,dx = \frac{3}{4}\cdot 180$ liefert $s \approx 20{,}5$, d. h. die Hügel erstrecken sich etwa 20,5 m weit.	4
f	Die Funktionen haben Gleichungen der Form $y = bx^2 + cx + d$ mit $b,c,d \in \mathbb{R}$. Bezeichnet man die Funktionen mit h_b, so ergibt sich mit $h_b(0)=f_{3,6}(0)$ und $h_b'(0)=f_{3,6}'(0)$: $c=\frac{5}{4}$, $d=2$ Da die Flugbahnen durch nach unten geöffnete Parabeln dargestellt werden, kommen für b nur negative Zahlen infrage.	4
g	$i(x)=h_{-\frac{1}{4}}(x)-g(x)$ Die Funktion i hat einen größten Wert von etwa 0,9, d. h. die größte Höhe gegenüber dem Hügel beträgt etwa 0,9 m.	3
h	Die Bedingungen $h_b'(x_0)=0$ und $h_b(x_0)=3{,}5$ liefern $b=-\frac{25}{96}$. Für $x \geq 0$ liefert $h_{-\frac{25}{96}}(x)=g(x)$: $x \approx 4{,}5$ Die Sprungweite beträgt etwa 4,5 m.	5
		50

3 Standardbezug

Teilaufgabe	BE	allgemeine mathematische Kompetenzen[2]						Anforderungsbereich		
		K1	K2	K3	K4	K5	K6	I	II	III
1 a	3				II		I		X	
b	4	I	I			I		X		
c	4	I				I		X		
d	4	II	II			II			X	
e	3				I			X		
f	3		III		II		III			X
2 a	5			II		III	II			X
b	3	III		II	III					X
c	3	II			II		I		X	
d	2	II			II		II		X	
e	4		II	II		II			X	
f	4	II	II			II			X	
g	3		II	II		II			X	
h	5		III	III		II				X

4 Bewertungshinweise

Die Bewertung der erbrachten Prüfungsleistungen hat sich für jede Teilaufgabe nach der am rechten Rand der Aufgabenstellung angegebenen Anzahl maximal erreichbarer Bewertungseinheiten (BE) zu richten.

Für die Bewertung der Gesamtleistung eines Prüflings ist ein Bewertungsraster[3] vorgesehen, das angibt, wie die in den Prüfungsteilen A und B insgesamt erreichten Bewertungseinheiten in Notenpunkte umgesetzt werden.

[2] Für jede Kompetenz, die bei der Bearbeitung der Teilaufgabe eine wesentliche Rolle spielt, ist der Anforderungsbereich (I, II oder III) eingetragen, in dem die Kompetenz benötigt wird.

[3] Das Bewertungsraster ist Teil des Dokuments „Beschreibung der Struktur“, das auf den Internetseiten des IQB zum Download bereitsteht.