

Gemeinsame Abituraufgabenpools der Länder

Beispielaufgaben

Aufgabe für das Fach Mathematik

Kurzbeschreibung

Anforderungsniveau	Prüfungsteil	Sachgebiet ¹	digitales Hilfsmittel
erhöht	B	AG/LA (A2)	WTR

1 Aufgabe

In einem kartesischen Koordinatensystem ist der Körper ABCDPQRS mit $A(28|0|0)$, $B(28|10|0)$, $C(0|10|0)$, $D(0|0|0)$ und $P(20|0|6)$ gegeben. Der Körper ist ein schiefes Prisma, die Grundfläche ABCD, die Deckfläche PQRS und die vier Seitenflächen sind also Parallelogramme.

- | | |
|--|----------------|
| a Zeigen Sie, dass die Seitenfläche ABQP quadratisch ist. | BE
3 |
| b Stellen Sie das Prisma in einem Koordinatensystem grafisch dar. | 3 |
| c Die Seitenfläche ABQP liegt in einer Ebene E. Ermitteln Sie eine Gleichung von E in Koordinatenform.
<div style="text-align: right;"><i>(zur Kontrolle: $E : 3x + 4z - 84 = 0$)</i></div> | 3 |
| d Die Seitenfläche CDSR liegt in einer Ebene F. Begründen Sie ohne zu rechnen, dass F durch die Gleichung $3x + 4z = 0$ beschrieben werden kann. | 2 |

Das Prisma beschreibt modellhaft den Grundkörper eines Kunstwerks aus massivem Beton, der auf einer horizontalen Fläche steht. Eine Längeneinheit im Koordinatensystem entspricht 0,1 m in der Wirklichkeit.

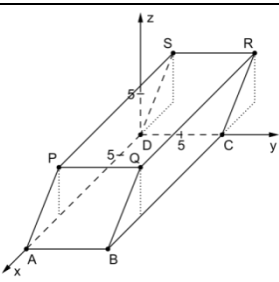
Der Grundkörper ist mit einer dünnen geradlinigen Bohrung versehen, die im Modell vom Punkt $G(11|3|6)$ der Deckfläche aus in Richtung des Schnittpunkts der Diagonalen der Grundfläche verläuft. In der Bohrung ist eine gerade Stahlstange mit einer Länge von 1,4 m so befestigt, dass die Stange zu drei Vierteln ihrer Länge aus der Deckfläche herausragt und in einer Höhe von 0,9 m über der Deckfläche endet. Ihr

¹ verwendete Abkürzungen: AG/LA - Analytische Geometrie/Lineare Algebra, AG/LA (A1) - Analytische Geometrie/Lineare Algebra (Alternative A1), AG/LA (A2) - Analytische Geometrie/Lineare Algebra (Alternative A2)

Durchmesser wird im Modell vernachlässigt.	
e Bestimmen Sie im Modell die Koordinaten des Punkts, in dem die Stange in der Bohrung endet.	6
f Auf der Deckfläche des Grundkörpers liegt eine Stahlkugel mit einem Durchmesser von 0,8 m. Im Modell berührt die Kugel die Deckfläche des Prismas im Punkt K. Beschreiben Sie, wie man im Modell rechnerisch überprüfen könnte, ob die Stahlkugel die Stange berührt, wenn die Koordinaten von K bekannt wären.	4
g Zum Schutz vor Beschädigungen während einer Baumaßnahme soll diejenige Seitenfläche des Kunstwerks, die im Modell durch das Quadrat ABQP dargestellt wird, mit einer rechteckigen Holzplatte so versehen werden, dass diese am Kunstwerk anliegt, sowohl unten als auch seitlich bündig mit diesem abschließt und in einer Höhe von 1 m über der Deckfläche endet. Untersuchen Sie, ob die Lage der Stahlstange das Anbringen der Holzplatte zulässt.	4
	25

2 Erwartungshorizont

Der Erwartungshorizont stellt für jede Teilaufgabe dar, in welchem Umfang und in welcher Form eine Lösung erwartet wird; nicht alle Lösungen sind dazu vollständig ausgeführt. Nicht dargestellte korrekte Lösungen sind als gleichwertig zu akzeptieren.

	BE
<p>a $\overline{AB} \circ \overline{AP} = 0$, $\overline{AB} = \overline{AP}$</p> <p>Ein Parallelogramm mit einem rechten Winkel und zwei benachbarten Seiten gleicher Länge ist ein Quadrat.</p>	3
<p>b</p> 	3
<p>c $E: \vec{x} = \overline{OA} + p \cdot \overline{AB} + q \cdot \overline{AP}$; $p, q \in \mathbb{R}$</p> <p>Das daraus resultierende Gleichungssystem</p> <p>I $x = 28 - 8q$ II $y = 10p$ III $z = 6q$</p> <p>liefert $E: 3x + 4z - 84 = 0$.</p>	3
<p>d Die Ebene F ist parallel zur Ebene E. Eine Gleichung von F hat deshalb auch die Form $3x + 4z + r = 0$ mit $r \in \mathbb{R}$. Da F den Koordinatenursprung enthält, ist $r = 0$.</p>	2
<p>e Schnittpunkt der Diagonalen der Grundfläche: $H(14 5 0)$</p> <p>Es gilt: $\overline{GH} = 7$, $\frac{1}{4} \cdot 1,4 \text{ m} = 0,35 \text{ m} = \frac{1}{2} \cdot 0,7 \text{ m}$</p>	6

	Mittelpunkt der Strecke von G nach H: $(12,5 4 3)$	
f	Man erhält den Mittelpunkt M der Kugel, indem man K um vier Längeneinheiten in positive z-Richtung verschiebt. Anschließend berechnet man den Abstand d von M zu der Gerade, entlang derer die Stange im Modell verläuft. Genau dann, wenn sich $d = 4$ ergibt, berührt die Stahlkugel die Stange.	4
g	Gleichung der Gerade, entlang derer die Stange im Modell verläuft: $s: \vec{x} = \begin{pmatrix} 11 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}$ $3 \cdot (11 + 3t) + 4 \cdot (6 - 6t) - 84 = 0 \Leftrightarrow t = -1,8$ Für alle Punkte, die im Modell auf der Stange liegen, gilt $t \geq -1,5$, d. h. die Lage der Stange lässt das Anbringen der Holzplatte zu.	4
		25

3 Standardbezug

Teilaufgabe	BE	allgemeine mathematische Kompetenzen ²						Anforderungsbereich		
		K1	K2	K3	K4	K5	K6	I	II	III
a	3	I				I		X		
b	3				I			X		
c	3					II			X	
d	2	II	II						X	
e	6		II	II		I			X	
f	4		III	III			III			X
g	4		III	III		II				X

4 Bewertungshinweise

Die Bewertung der erbrachten Prüfungsleistungen hat sich für jede Teilaufgabe nach der am rechten Rand der Aufgabenstellung angegebenen Anzahl maximal erreichbarer Bewertungseinheiten (BE) zu richten.

Für die Bewertung der Gesamtleistung eines Prüflings ist ein Bewertungsraster³ vorgesehen, das angibt, wie die in den Prüfungsteilen A und B insgesamt erreichten Bewertungseinheiten in Notenpunkte umgesetzt werden.

² Für jede Kompetenz, die bei der Bearbeitung der Teilaufgabe eine wesentliche Rolle spielt, ist der Anforderungsbereich (I, II oder III) eingetragen, in dem die Kompetenz benötigt wird.

³ Das Bewertungsraster ist Teil des Dokuments „Beschreibung der Struktur“, das auf den Internetseiten des IQB zum Download bereitsteht.