

Gemeinsame Abituraufgabenpools der Länder

# Pool für das Jahr 2023

## Aufgaben für das Fach Mathematik

### Kurzbeschreibung

Anforderungsniveau	Prüfungsteil	Sachgebiet <sup>1</sup>	digitales Hilfsmittel
grundlegend	B	Stochastik	WTR

### 1 Aufgabe

<p><b>1</b> Von den Lehrkräften eines Landes arbeiten 25 % an einem Gymnasium. 15 % der Lehrkräfte sind weiblich und arbeiten an einem Gymnasium. Insgesamt sind 72 % der Lehrkräfte weiblich.</p> <p><b>a</b> Stellen Sie den Sachzusammenhang in einer vollständig ausgefüllten Vierfeldertafel dar.</p> <p><b>b</b> Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine zufällig ausgewählte Lehrkraft weiblich ist oder an einem Gymnasium arbeitet.</p> <p><b>c</b> Eine zufällig ausgewählte Lehrkraft ist weiblich. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sie an einem Gymnasium arbeitet.</p> <p>100 Lehrkräfte werden zufällig ausgewählt.</p> <p><b>d</b> Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass unter diesen 100 Lehrkräften die Anzahl derer, die nicht am Gymnasium arbeiten, mindestens viermal so groß ist, wie die Anzahl derer, die am Gymnasium arbeiten.</p> <p><b>e</b> Geben Sie die Bedeutung des Terms <math>\sum_{k=75}^{100} \binom{100}{k} \cdot 0,75^k \cdot 0,25^{100-k}</math> im Sachzusammenhang an.</p>	<p><b>BE</b></p> <p>3</p> <p>2</p> <p>2</p> <p>3</p> <p>2</p>
--	---

<sup>1</sup> verwendete Abkürzungen: AG/LA - Analytische Geometrie/Lineare Algebra, AG/LA (A1) - Analytische Geometrie/Lineare Algebra (Alternative A1), AG/LA (A2) - Analytische Geometrie/Lineare Algebra (Alternative A2)

2 In einem Behälter befinden sich vier weiße und fünf schwarze Kugeln. Dazu wird ein Spiel angeboten. Der Spieler bezahlt zunächst einen Einsatz von 2 Euro; dieser Betrag wird neben dem Behälter ausgelegt. Anschließend muss der Spieler aus dem Behälter zweimal nacheinander eine Kugel zufällig ziehen und wieder zurücklegen. Nach jedem der beiden Züge wird der ausliegende Betrag vom Spielleiter verdoppelt, wenn eine weiße Kugel gezogen wird, und sonst halbiert. Nach dem Spiel erhält der Spieler den dann ausliegenden Betrag.

a Der Term  $8 \cdot \left(\frac{4}{9}\right)^2 + 2 \cdot 2 \cdot \frac{4}{9} \cdot \frac{5}{9} + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{5}{9}\right)^2$  gibt den Erwartungswert für den Betrag in Euro an, den der Spieler nach dem Spiel erhält. Geben Sie die Bedeutung des zweiten der drei Summanden im Sachzusammenhang an und erläutern Sie Ihre Angabe. 3

b Ermitteln Sie, wie das Verhältnis der Anzahlen der weißen und schwarzen Kugeln im Behälter gewählt werden müsste, damit Spieler und Spielleiter die gleiche Gewinnerwartung haben. 5

20

## 2 Erwartungshorizont

Der Erwartungshorizont stellt für jede Teilaufgabe eine mögliche Lösung dar. Nicht dargestellte korrekte Lösungen sind als gleichwertig zu akzeptieren.

		BE																
1	<p>a G: „Eine Lehrkraft arbeitet an einem Gymnasium.“ W: „Eine Lehrkraft ist weiblich.“</p> <table border="1" style="margin-left: 20px;"> <thead> <tr> <th></th> <th>G</th> <th><math>\bar{G}</math></th> <th></th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <th>W</th> <td>15 %</td> <td>57 %</td> <td>72 %</td> </tr> <tr> <th><math>\bar{W}</math></th> <td>10 %</td> <td>18 %</td> <td>28 %</td> </tr> <tr> <th></th> <td>25 %</td> <td>75 %</td> <td>100 %</td> </tr> </tbody> </table>		G	$\bar{G}$		W	15 %	57 %	72 %	$\bar{W}$	10 %	18 %	28 %		25 %	75 %	100 %	3
	G	$\bar{G}$																
W	15 %	57 %	72 %															
$\bar{W}$	10 %	18 %	28 %															
	25 %	75 %	100 %															
	b $1 - 18\% = 82\%$	2																
	c $\frac{15\%}{72\%} \approx 21\%$	2																
	d X: Anzahl der Lehrkräfte, die nicht an einem Gymnasium arbeiten $P_{0,75}^{100}(X \geq 80) \approx 15\%$	3																
	e Der Term gibt die Wahrscheinlichkeit dafür an, dass höchstens 25 der 100 ausgewählten Lehrkräfte an einem Gymnasium arbeiten.	2																
2	a Der zweite Summand erfasst den Fall, dass eine weiße und eine schwarze Kugel gezogen werden; die zugehörigen Wahrscheinlichkeiten betragen $\frac{4}{9}$ bzw. $\frac{5}{9}$ . Dies ist in zwei verschiedenen Reihenfolgen möglich. Der Spieler erhält dafür nach dem Spiel jeweils 2 Euro.	3																

	<b>b</b>	Die Wahrscheinlichkeit dafür, eine weiße Kugel zu ziehen, wird mit $p$ bezeichnet. $8 \cdot p^2 + 2 \cdot 2 \cdot p \cdot (1-p) + \frac{1}{2} \cdot (1-p)^2 = \frac{9}{2}p^2 + 3p + \frac{1}{2}$ $\frac{9}{2}p^2 + 3p + \frac{1}{2} = 2 \Leftrightarrow p^2 + \frac{6}{9}p + \frac{1}{9} = \frac{4}{9} \Leftrightarrow p^2 + \frac{2}{3}p - \frac{1}{3} = 0$ $\Leftrightarrow p = -\frac{1}{3} - \sqrt{\frac{1}{9} + \frac{1}{3}} = -1 \vee p = -\frac{1}{3} + \sqrt{\frac{1}{9} + \frac{1}{3}} = \frac{1}{3}$ Die Anzahl der schwarzen Kugeln müsste doppelt so groß sein wie die der weißen.	5
			20

### 3 Standardbezug

Teilaufgabe	BE	allgemeine mathematische Kompetenzen						Anforderungsbereich		
		K1	K2	K3	K4	K5	K6	I	II	III
1 a	3				I		I	X		
b	2				I	I	I	X		
c	2			I		I	I	X		
d	3		II	II		I	I		X	
e	2	II		II	II		I		X	
2 a	3	II		II	I		I		X	
b	5	II	III	II	II	II				X

### 4 Bewertungshinweise

Die Bewertung der erbrachten Prüfungsleistungen hat sich für jede Teilaufgabe nach der am rechten Rand der Aufgabenstellung angegebenen Anzahl maximal erreichbarer Bewertungseinheiten (BE) zu richten.

Für die Bewertung der Gesamtleistung eines Prüflings ist ein Bewertungsraster<sup>2</sup> vorgesehen, das angibt, wie die in den Prüfungsteilen A und B insgesamt erreichten Bewertungseinheiten in Notenpunkte umgesetzt werden.

<sup>2</sup> Das Bewertungsraster ist Teil des Dokuments „Beschreibung der Struktur“, das auf den Internetseiten des IQB zum Download bereitsteht.