Institut zur Qualitätsentwicklung im Bildungswesen

KULTUSMINISTER KONFERENZ

Gemeinsame Abituraufgabenpools der Länder

Pool für das Jahr 2023

Aufgaben für das Fach Mathematik

Kurzbeschreibung

Anforderungsniveau	Prüfungsteil	Sachgebiet[1]	digitales Hilfsmittel
grundlegend	B	Stochastik	MMS/WTR

1 Aufgabe

BE

1 Die Abbildung 1 zeigt das Netz eines Würfels.

Der Würfel wird 30-mal geworfen. Die Zufallsgröße X gibt an, wie oft die Zahl „4“ erzielt wird.

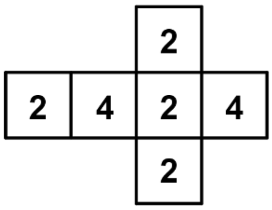

Abb. 1

a Begründen Sie, dass X binomialverteilt mit dem Parameter $p = \frac{1}{3}$ ist. 2

b Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Zahl „4“ häufiger erzielt wird als die Zahl „2“. 2

c Geben Sie im Sachzusammenhang ein Ereignis an, dessen Wahrscheinlichkeit mit dem Term $\binom{29}{8} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^8 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{21} \cdot \frac{1}{3}$ berechnet werden kann. 2

d Bestimmen Sie den Erwartungswert für die Summe der erzielten Zahlen. 3

Zwei Personen werfen den Würfel abwechselnd so lange, bis eine Person mit einem Wurf eine andere Zahl erzielt als die andere Person beim unmittelbar vorhergehenden Wurf. Die Person, die dabei die größere Zahl erzielt hat, gewinnt das Spiel.

e Begründen Sie, dass mit dem Term $1 - \left(\frac{1}{3}\right)^3 - \left(\frac{2}{3}\right)^3$ die Wahrscheinlichkeit dafür berechnet werden kann, dass das Spiel spätestens mit dem dritten Wurf entschieden wird. 2

[1] verwendete Abkürzungen: AG/LA - Analytische Geometrie/Lineare Algebra, AG/LA (A1) - Analytische Geometrie/Lineare Algebra (Alternative A1), AG/LA (A2) - Analytische Geometrie/Lineare Algebra (Alternative A2)

f Eine der beiden Personen beginnt das Spiel. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass diese Person verliert und der Würfel höchstens viermal geworfen wird. — 3

2 Die Abbildung 2 zeigt das Netz eines weiteren Würfels.

Der Würfel wird 7500-mal geworfen. Bei den ersten 1500 Würfen wird 735-mal die Zahl „1“ und 285-mal die Zahl „6“ erzielt.

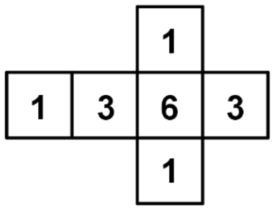

Abb. 2

a Bestimmen Sie für die ersten 1500 Würfe die relative Häufigkeit der Zahl „3“. — 2

b Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass bei höchstens 17 % der 7500 Würfe die Zahl „6“ erzielt wird. — 4

20

2 Erwartungshorizont

Der Erwartungshorizont stellt für jede Teilaufgabe eine mögliche Lösung dar. Nicht dargestellte korrekte Lösungen sind als gleichwertig zu akzeptieren.

			BE
1	a	Bei jedem Wurf gibt es nur zwei mögliche Ergebnisse. Dabei tritt das Ergebnis „4“ mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{3}$ ein, da zwei der sechs Seiten des Würfels mit dieser Zahl beschriftet sind. Jeder Wurf ist unabhängig von den anderen Würfen.	2
	b	$P_{\frac{1}{3}}^{30}(X \geq 16) \approx 2\,\%$	2
	c	Bei neun Würfen wird die „4“ erzielt, unter anderen beim letzten Wurf.	2
	d	$E(X) = 10$ $10 \cdot 4 + (30-10) \cdot 2 = 80$	3
	e	$\left(\frac{1}{3}\right)^3$ und $\left(\frac{2}{3}\right)^3$ sind die Wahrscheinlichkeiten dafür, dass dreimal nacheinander die „4“ bzw. die „2“ erzielt wird. In allen anderen Fällen ist das Spiel bereits spätestens mit dem dritten Wurf entschieden.	2
	f	$\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} + \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{32}{81}$	3
2	a	$\frac{1500-(735+285)}{1500} = 32\,\%$	2
	b	Y: Anzahl der Würfe, bei denen die „6“ erzielt wird Mit $285 + k \leq 0{,}17 \cdot 7500 \Leftrightarrow k \leq 990$ ergibt sich $P_{\frac{1}{6}}^{6000}(Y \leq 990) \approx 37\,\%$.	4
			20

3 Standardbezug

Teilaufgabe	BE	allgemeine mathematische Kompetenzen						Anforderungsbereich		
		K1	K2	K3	K4	K5	K6	I	II	III
1 a	2	I		I	I		I	X		
b	2		I	I		I		X		
c	2	II		II	II		I		X	
d	3		II	II		I			X	
e	2	II		II	I		II		X	
f	3	II	II	II		I	I		X	
2 a	2			I		I		X		
b	4	II	III	II		I	II			X

4 Bewertungshinweise

Die Bewertung der erbrachten Prüfungsleistungen hat sich für jede Teilaufgabe nach der am rechten Rand der Aufgabenstellung angegebenen Anzahl maximal erreichbarer Bewertungseinheiten (BE) zu richten.

Für die Bewertung der Gesamtleistung eines Prüflings ist ein Bewertungsraster[2] vorgesehen, das angibt, wie die in den Prüfungsteilen A und B insgesamt erreichten Bewertungseinheiten in Notenpunkte umgesetzt werden.

[2] Das Bewertungsraster ist Teil des Dokuments „Beschreibung der Struktur“, das auf den Internetseiten des IQB zum Download bereitsteht.