

Gemeinsame Abituraufgabenpools der Länder

Pool für das Jahr 2023

Aufgaben für das Fach Mathematik

Kurzbeschreibung

Anforderungsniveau	Prüfungsteil	Sachgebiet ¹	digitales Hilfsmittel
grundlegend	B	Analysis	MMS

1 Aufgabe

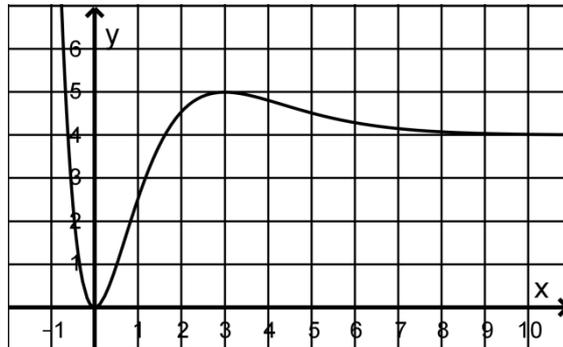
<p>1 Gegeben sind die in \mathbb{R} definierten Funktionen $p: x \mapsto -x^2 - x + 1$ und $q: x \mapsto e^{-x}$. Die Graphen von p und q haben genau einen gemeinsamen Punkt; dieser Punkt liegt auf der y-Achse. Für die erste Ableitungsfunktion von q gilt $q'(x) = -q(x)$.</p> <p>a Beschreiben Sie, wie der Graph von q' aus dem Graphen von q erzeugt werden kann. Geben Sie die Wertemenge von q' an.</p> <p>b Berechnen Sie die Größe des Winkels, in dem der Graph von q die Gerade mit der Gleichung $y = 4$ schneidet.</p> <p>c Zeigen Sie, dass die Graphen von p und q in ihrem gemeinsamen Punkt eine gemeinsame Tangente haben, und geben Sie eine Gleichung dieser Tangente an.</p> <p>d Geben Sie die geometrische Bedeutung der Gleichung $\int_0^b (q(x) - p(x)) dx = 4$ an und bestimmen Sie den Wert von b.</p>	BE
<p>2 Für jeden Wert von $a \in \mathbb{R}$ ist eine in \mathbb{R} definierte Funktion $h_a: x \mapsto (x^2 - x - a) \cdot e^{-x}$ gegeben.</p> <p>a Berechnen Sie den Abstand der beiden Extrempunkte des Graphen von h_1.</p> <p>b Für jeden Wert von a mit $a > -\frac{5}{4}$ hat der Graph von h_a zwei Extrempunkte. Bestimmen Sie die x-Koordinaten dieser beiden Extrempunkte in Abhängigkeit von a.</p>	2 3 3 3 4 5

¹ verwendete Abkürzungen: AG/LA - Analytische Geometrie/Lineare Algebra, AG/LA (A1) - Analytische Geometrie/Lineare Algebra (Alternative A1), AG/LA (A2) - Analytische Geometrie/Lineare Algebra (Alternative A2)

Begründen Sie, dass es zu jeder Stelle $x > \frac{3}{2}$ einen Wert von a gibt, für den der Graph von h_a im Punkt $(x | h_a(x))$ einen Hochpunkt hat.

3 Ein Bewässerungskanal wird durch Öffnen einer Schleuse in Betrieb genommen.

Die in \mathbb{R} definierte Funktion $w : x \mapsto 4 \cdot (x^2 - x - 1) \cdot e^{-x} + 4$ beschreibt für $x \geq 0$ die zeitliche Entwicklung der momentanen Durchflussrate des Wassers an einer Messstelle. Dabei ist x die seit Beobachtungsbeginn vergangene Zeit in Sekunden und $w(x)$ die momentane Durchflussrate in Kubikmetern pro Sekunde.



Die Abbildung zeigt den Graphen von w .

a Geben Sie den Wert des Terms $\lim_{x \rightarrow +\infty} w(x)$ sowie die Bedeutung dieses Werts im Sachzusammenhang an. 2

b Bestimmen Sie die momentane Durchflussrate für denjenigen Zeitpunkt, zu dem sie am stärksten abnimmt. 3

c Betrachtet wird der Zeitraum der ersten zehn Sekunden nach Beobachtungsbeginn. Beschreiben Sie unter Verwendung geeigneter Flächen die graphische Bedeutung der folgenden Aussage: 3

Für den betrachteten Zeitraum beträgt die mittlere Durchflussrate etwa $4 \frac{m^3}{s}$.

d Die Tangente an den Graphen von w im Punkt $(1 | w(1))$ wird durch die Gleichung $y = t(x)$ dargestellt. Interpretieren Sie die folgende Aussage im Sachzusammenhang: 3

Für alle Werte von $x \in [0,7; 1,4]$ gilt $\left| \frac{t(x) - w(x)}{w(x)} \right| < 0,05$.

e An der Messstelle fließen in einem Zeitraum von drei Sekunden dreizehn Kubikmeter Wasser vorbei. Berechnen Sie die dafür infrage kommenden Zeiträume. 4

35

2 Erwartungshorizont

Der Erwartungshorizont stellt für jede Teilaufgabe eine mögliche Lösung dar. Nicht dargestellte korrekte Lösungen sind als gleichwertig zu akzeptieren.

		BE
1	<p>a Der Graph von q' kann aus dem Graphen von q durch eine Spiegelung an der x-Achse erzeugt werden.</p> <p>Wertemenge: $]-\infty; 0[$</p>	2

	b	$q(x) = 4 \Leftrightarrow q'(x) = -4$ $\tan \varphi = -4$ liefert $\varphi \approx -76^\circ$, d. h. die Größe des Schnittwinkels beträgt etwa 76° .	3
	c	$p'(0) = q'(0)$ Gleichung der Tangente: $y = -x + 1$	3
	d	Die Fläche, die die Graphen von p und q und die Gerade mit der Gleichung $x = b$ einschließen, hat den Inhalt 4. $b \approx 2,1$	3
2	a	$h_1'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 3$, $h_1(0) = -1$, $h_1(3) = 5e^{-3}$ gesuchter Abstand: $\sqrt{9 + (5e^{-3} + 1)^2}$	4
	b	$h_a'(x) = 0$ liefert $x_1 = \frac{3}{2} - \frac{1}{2} \cdot \sqrt{4a + 5}$ und $x_2 = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} \cdot \sqrt{4a + 5}$. Durchläuft a alle Werte des Intervalls $]-\frac{5}{4}; +\infty[$, so nimmt x_2 alle Werte des Intervalls $]\frac{3}{2}; +\infty[$ an, wobei jeweils $h_a''(x_2) < 0$ gilt.	5
3	a	$\lim_{x \rightarrow +\infty} w(x) = 4$, d. h. die momentane Durchflussrate nähert sich mit der Zeit $4 \frac{\text{m}^3}{\text{s}}$.	2
	b	In Verbindung mit der Abbildung ergibt sich: Die y -Koordinate des Wendepunkts, dessen x -Koordinate größer als 3 ist, ist etwa 4,7. Damit beträgt die momentane Durchflussrate zum betrachteten Zeitpunkt etwa $4,7 \frac{\text{m}^3}{\text{s}}$.	3
	c	Das Flächenstück, das der Graph von w mit der x -Achse und der Gerade mit der Gleichung $x = 10$ einschließt, hat etwa den gleichen Inhalt wie das Flächenstück, das die Gerade mit der Gleichung $y = 4$ mit der x -Achse und den Geraden mit den Gleichungen $x = 0$ und $x = 10$ begrenzt.	3
	d	Für den angegebenen Zeitraum beschreibt die Tangente die zeitliche Entwicklung der momentanen Durchflussrate mit einer relativen Abweichung von weniger als 5%.	3
	e	$\int_x^{x+3} w(t) dt = 13$ liefert $x_1 \approx 0,8$ und $x_2 \approx 4,4$ Damit kommen die beiden Zeiträume mit einer Dauer von drei Sekunden infrage, die etwa 0,8 s bzw. etwa 4,4 s nach Beobachtungsbeginn beginnen.	4
			35

3 Standardbezug

Teilaufgabe	BE	allgemeine mathematische Kompetenzen						Anforderungsbereich		
		K1	K2	K3	K4	K5	K6	I	II	III
1 a	2				I	I	I	X		
b	3		II			I	I		X	
c	3	I	I			I		X		
d	3				I	I	I	X		
2 a	4		I			II			X	
b	5	III	II		II	I	III			X
3 a	2			I		I	I	X		
b	3	II	I	II	I	I	I		X	
c	3	II		II			II		X	
d	3			III	II		II			X
e	4			II		II			X	

4 Bewertungshinweise

Die Bewertung der erbrachten Prüfungsleistungen hat sich für jede Teilaufgabe nach der am rechten Rand der Aufgabenstellung angegebenen Anzahl maximal erreichbarer Bewertungseinheiten (BE) zu richten.

Für die Bewertung der Gesamtleistung eines Prüflings ist ein Bewertungsraster² vorgesehen, das angibt, wie die in den Prüfungsteilen A und B insgesamt erreichten Bewertungseinheiten in Notenpunkte umgesetzt werden.

² Das Bewertungsraster ist Teil des Dokuments „Beschreibung der Struktur“, das auf den Internetseiten des IQB zum Download bereitsteht.