

Gemeinsame Abituraufgabenpools der Länder

# Pool für das Jahr 2023

## Aufgaben für das Fach Mathematik

### Kurzbeschreibung

Anforderungsniveau	Prüfungsteil	Sachgebiet <sup>1</sup>	digitales Hilfsmittel
erhöht	B	AG/LA (A2)	WTR

### 1 Aufgabe

Die Abbildung zeigt den Körper ABCDEF mit  $A(6|3|0)$ ,  $B(0|6|0)$ ,  $C(3|0|0)$ ,  $D(6|3|6)$ ,  $E(0|6|6)$  und  $F(3|0|12)$ .

- a Die Punkte D, E und F liegen in der Ebene L. Ermitteln Sie eine Gleichung von L in Koordinatenform.

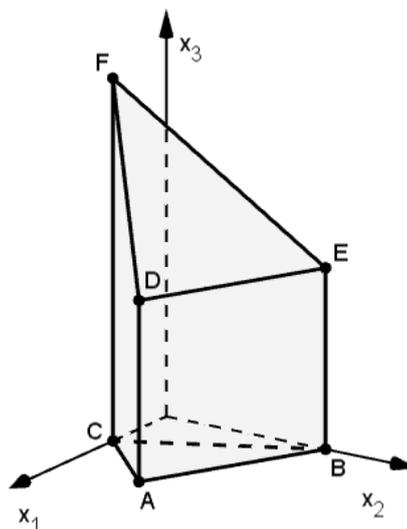
(zur Kontrolle:  $2x_1 + 4x_2 + 3x_3 - 42 = 0$ )

- b Bestimmen Sie die Größe des Winkels, den L mit der  $x_1x_2$ -Ebene einschließt.

- c Der Flächeninhalt des Dreiecks ABC kann mit dem Term  $6 \cdot 6 - \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3 - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 6$  berechnet werden. Veranschaulichen Sie diese Tatsache durch geeignete Eintragungen in der Abbildung.

- d Berechnen Sie das Volumen des Körpers ABCDEF.

- e Die Ebene  $N_k$  enthält die  $x_3$ -Achse und den Punkt  $P_k(1-k|k|0)$  mit  $k \in ]0;1[$ . Welche Kanten des Körpers von  $N_k$  geschnitten werden, ist abhängig von k. Durchläuft k alle Werte zwischen 0 und 1, so gibt es Bereiche  $]a;b[$ , für die  $N_k$  für alle Werte von  $k \in ]a;b[$  jeweils die gleichen Kanten des Körpers schneidet. Bestimmen Sie den größten dieser Bereiche und geben Sie die zugehörigen Kanten an.



BE

4

3

3

3

4

<sup>1</sup> verwendete Abkürzungen: AG/LA - Analytische Geometrie/Lineare Algebra, AG/LA (A1) - Analytische Geometrie/Lineare Algebra (Alternative A1), AG/LA (A2) - Analytische Geometrie/Lineare Algebra (Alternative A2)

f Auf der Kante  $\overline{AD}$  liegt der Punkt Q, auf der Kante  $\overline{BE}$  der Punkt R(0|6|2). Das Dreieck FQR hat in Q einen rechten Winkel. Bestimmen Sie die  $x_3$ -Koordinate von Q. 5

g Der Körper wird so um die Gerade AB gedreht, dass der mit D bezeichnete Eckpunkt nach der Drehung in der  $x_1x_2$ -Ebene liegt und dabei eine positive  $x_2$ -Koordinate hat. Die folgenden Rechnungen liefern die Lösung einer Aufgabe im Zusammenhang mit der beschriebenen Drehung: 3

$$\begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} \circ \begin{bmatrix} 0 \\ 6 \\ 0 \end{bmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0,8, \text{ d. h. } S(4,8 | 3,6 | 0)$$

$$\overline{OT} = \overline{OS} + |\overline{CS}| \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Formulieren Sie eine passende Aufgabenstellung und geben Sie die Bedeutung von S an.

25

## 2 Erwartungshorizont

Der Erwartungshorizont stellt für jede Teilaufgabe eine mögliche Lösung dar. Nicht dargestellte korrekte Lösungen sind als gleichwertig zu akzeptieren.

	BE
<p>a <math>\vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \sigma \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}</math> mit <math>\mu, \sigma \in \mathbb{R}</math> liefert das Gleichungssystem:</p> <p style="text-align: center;">I <math>x_1 = 6 + \mu - 2\sigma</math>      II <math>x_2 = 3 + \mu + \sigma</math>      III <math>x_3 = 6 - 2\mu</math></p> <p>Aus III folgt <math>\mu = 3 - \frac{1}{2}x_3</math> und damit aus II <math>\sigma = -6 + x_2 + \frac{1}{2}x_3</math>.</p> <p>Mit I ergibt sich <math>x_1 = 6 + 3 - \frac{1}{2}x_3 - 2 \cdot (-6 + x_2 + \frac{1}{2}x_3) \Leftrightarrow x_1 = 21 - 2x_2 - \frac{3}{2}x_3</math>.</p>	4
<p>b <math>\cos \varphi = \frac{\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}{\sqrt{2^2 + 4^2 + 3^2}} = \frac{3}{\sqrt{29}}</math> liefert <math>\varphi \approx 56^\circ</math>.</p>	3

c		3
d	$6 \cdot 6 - \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3 - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 6 = \frac{27}{2}$ $\frac{27}{2} \cdot 6 + \frac{1}{3} \cdot \frac{27}{2} \cdot 6 = 108$	3
e	<p><math>P_k</math> liegt genau dann auf OA, wenn <math>\frac{6}{3} = \frac{1-k}{k} \Leftrightarrow k = \frac{1}{3}</math> gilt.</p> <p>Intervall: <math>\left] \frac{1}{3}; 1 \right[</math></p> <p>Kanten: <math>\overline{BC}</math>, <math>\overline{EF}</math>, <math>\overline{AB}</math>, <math>\overline{DE}</math></p>	4
f	<p>Bezeichnet man die gesuchte <math>x_3</math>-Koordinate mit <math>q</math>, so gilt für <math>0 \leq q \leq 6</math>:</p> $\overline{QR} \circ \overline{QF} = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ 2-q \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 12-q \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow 9 + (2-q) \cdot (12-q) = 0 \Leftrightarrow q^2 - 14q + 33 = 0$ $\Leftrightarrow q = 7 - \sqrt{49 - 33} = 3$	5
g	<p>Aufgabenstellung: Der mit C bezeichnete Eckpunkt des Körpers wird nach der Drehung mit T bezeichnet. Ermitteln Sie die Koordinaten von T.</p> <p>Der Punkt S ist der Fußpunkt des Lots von C auf AB.</p>	3
		25

### 3 Standardbezug

Teilaufgabe	BE	allgemeine mathematische Kompetenzen						Anforderungsbereich		
		K1	K2	K3	K4	K5	K6	I	II	III
a	4					II			X	
b	3					II			X	
c	3	I			I			X		
d	3		I		I	I		X		
e	4	II	III		II	II	III			X
f	5	I	II		I	II	I		X	
g	3	III	II		III		II			X

## 4 Bewertungshinweise

---

Die Bewertung der erbrachten Prüfungsleistungen hat sich für jede Teilaufgabe nach der am rechten Rand der Aufgabenstellung angegebenen Anzahl maximal erreichbarer Bewertungseinheiten (BE) zu richten.

Für die Bewertung der Gesamtleistung eines Prüflings ist ein Bewertungsraster<sup>2</sup> vorgesehen, das angibt, wie die in den Prüfungsteilen A und B insgesamt erreichten Bewertungseinheiten in Notenpunkte umgesetzt werden.

---

<sup>2</sup> Das Bewertungsraster ist Teil des Dokuments „Beschreibung der Struktur“, das auf den Internetseiten des IQB zum Download bereitsteht.