

Gemeinsame Abituraufgabenpools der Länder

Pool für das Jahr 2023

Aufgaben für das Fach Mathematik

Kurzbeschreibung

Anforderungsniveau	Prüfungsteil	Sachgebiet ¹	digitales Hilfsmittel
erhöht	B	AG/LA (A2)	MMS

1 Aufgabe

Die Abbildung zeigt das Viereck ABCD mit $A(0|3|0)$, $B(0|9|0)$, $C(2|8|4)$ und $D(2|4|4)$. Gegeben sind außerdem die Punkte $S_t(0|6|t)$ mit $t \in \mathbb{R}_0^+$.

a Weisen Sie nach, dass das Viereck ABCD ein Trapez ist, in dem zwei gegenüberliegende Seiten gleich lang sind, und dass dieses Trapez kein Rechteck ist.

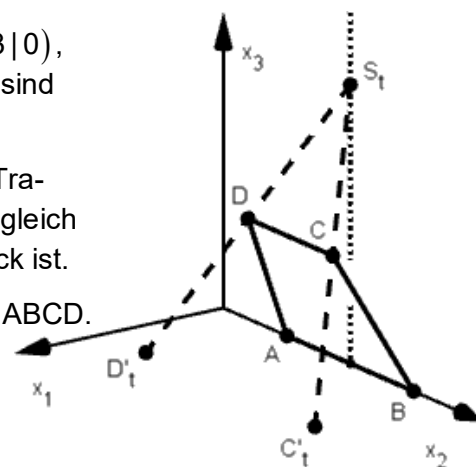
b Berechnen Sie den Flächeninhalt des Vierecks ABCD.

c Bestimmen Sie eine Gleichung der Ebene E, in der das Viereck ABCD liegt, in Koordinatenform.

(zur Kontrolle: $2x_1 - x_3 = 0$)

d Die Ebene E schneidet die x_1x_3 -Ebene in einer Gerade. Geben Sie die Koordinaten zweier Punkte an, die auf dieser Gerade und symmetrisch bezüglich des Koordinatenursprungs liegen.

e Vom Punkt S_t aus wird das Lot auf die Ebene E gefällt. Ermitteln Sie diejenigen Werte von t, für die der Lotfußpunkt im Inneren des Vierecks ABCD liegt.



BE

4

3

3

2

5

¹ verwendete Abkürzungen: AG/LA - Analytische Geometrie/Lineare Algebra, AG/LA (A1) - Analytische Geometrie/Lineare Algebra (Alternative A1), AG/LA (A2) - Analytische Geometrie/Lineare Algebra (Alternative A2)

Im Folgenden gilt $t > 4$.

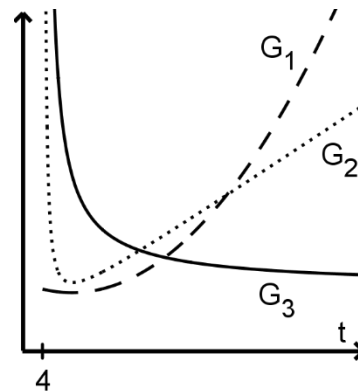
Die Gerade durch die Punkte S_t und C schneidet die x_1x_2 -Ebene im Punkt C'_t , die Gerade durch die Punkte S_t und D schneidet diese Ebene im Punkt D'_t (vgl. Abbildung).

- f Die beiden folgenden Gleichungen I und II liefern gemeinsam einen bestimmten Wert von t. 5

$$\text{I } \overrightarrow{OS_t} + r \cdot \overrightarrow{S_t C} = \overrightarrow{OC'_t} \text{ mit } C'_t(x_1 | x_2 | 0) \qquad \text{II } \overrightarrow{BA} \circ \overrightarrow{BC'_t} = 0$$

Geben Sie für diesen Wert von t die Art des Vierecks $ABC'_tD'_t$ an und begründen Sie Ihre Angabe.

- g Das Volumen der Pyramide $ABC'_tD'_tS_t$ wird in Abhängigkeit von t durch einen der drei abgebildeten Graphen G_1 , G_2 und G_3 dargestellt. Geben Sie diesen Graphen an und begründen Sie Ihre Angabe. 3



25

2 Erwartungshorizont

Der Erwartungshorizont stellt für jede Teilaufgabe eine mögliche Lösung dar. Nicht dargestellte korrekte Lösungen sind als gleichwertig zu akzeptieren.

	BE
a Sowohl A und B als auch C und D haben übereinstimmende x_1 - und x_3 -Koordinaten, \overline{AB} und \overline{CD} sind also parallel. Außerdem gilt $ \overline{AD} = \overline{BC} $ sowie $\overline{AB} \circ \overline{AD} = 6 \neq 0$.	4
b Mit $F(0 4 0)$ ergibt sich für den Flächeninhalt $\frac{1}{2} \cdot (\overline{AB} + \overline{CD}) \cdot \overline{FD} = 10\sqrt{5}$.	3
c $\vec{n} \circ \overline{AB} = 0 \wedge \vec{n} \circ \overline{AD} = 0$ liefert $\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ als Normalenvektor von E. Da E den Koordinatenursprung enthält, ergibt sich für die gesuchte Gleichung $2x_1 - x_3 = 0$.	3
d $(2 0 4)$, $(-2 0 -4)$	2

e	Eine Gleichung der Gerade, die durch S_t verläuft und senkrecht zu E steht, ist $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \overline{OS}_t + r \cdot \vec{n}$. Mit $2x_1 - x_3 = 0$ ergibt sich als Lotfußpunkt $(\frac{2}{5}t \mid 6 \mid \frac{4}{5}t)$. Dieser liegt für $0 < \frac{2}{5}t < 2 \Leftrightarrow 0 < t < 5$ im Inneren des Vierecks.	5
f	Rechteck Begründung: Die Gleichungen I und II liefern denjenigen Wert von t, für den \overline{BC}'_t senkrecht zu \overline{AB} steht. Da das Viereck ABCD symmetrisch bezüglich der Ebene mit der Gleichung $x_2 = 6$ ist und S_t in dieser Ebene liegt, steht dann auch \overline{AD}'_t senkrecht zu \overline{AB} und ist $\overline{C}'_t\overline{D}'_t$ parallel zu \overline{AB} .	5
g	Graph G_2 Begründung: Für $t \rightarrow 4$ wird der Inhalt der Grundfläche der Pyramide beliebig groß, während die Höhe stets größer als 4 ist. Für $t \rightarrow +\infty$ wird die Höhe beliebig groß, während der Inhalt der Grundfläche stets größer ist als der Inhalt des Vierecks mit den Eckpunkten A, B, $(2 \mid 8 \mid 0)$ und $(2 \mid 4 \mid 0)$. Damit wird das Volumen in beiden Fällen beliebig groß.	3
		25

3 Standardbezug

Teilaufgabe	BE	allgemeine mathematische Kompetenzen						Anforderungsbereich		
		K1	K2	K3	K4	K5	K6	I	II	III
a	4	I				I		X		
b	3		II		I	I			X	
c	3					II			X	
d	2	I	I		I		I	X		
e	5	II	II		I	II	I		X	
f	5	III	II		II		II			X
g	3	II	III		II		II			X

4 Bewertungshinweise

Die Bewertung der erbrachten Prüfungsleistungen hat sich für jede Teilaufgabe nach der am rechten Rand der Aufgabenstellung angegebenen Anzahl maximal erreichbarer Bewertungseinheiten (BE) zu richten.

Für die Bewertung der Gesamtleistung eines Prüflings ist ein Bewertungsraster² vorgesehen, das angibt, wie die in den Prüfungsteilen A und B insgesamt erreichten Bewertungseinheiten in Notenpunkte umgesetzt werden.

² Das Bewertungsraster ist Teil des Dokuments „Beschreibung der Struktur“, das auf den Internetseiten des IQB zum Download bereitsteht.