

Gemeinsame Abituraufgabenpools der Länder

# Pool für das Jahr 2022

## Aufgaben für das Fach Mathematik

### Kurzbeschreibung

Anforderungsniveau	Prüfungsteil	Sachgebiet <sup>1</sup>	digitales Hilfsmittel
grundlegend	B	Analysis	WTR

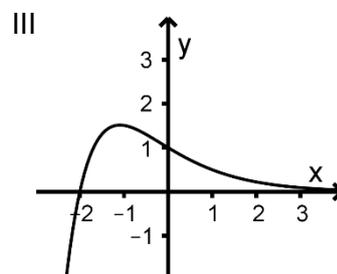
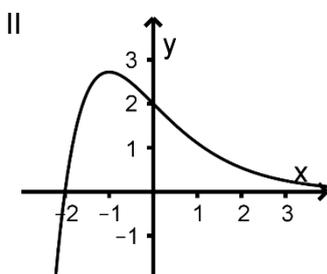
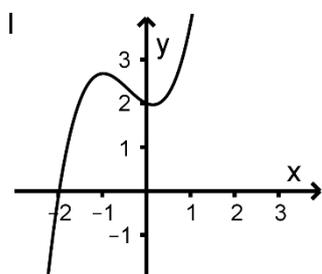
### 1 Aufgabe

1 Gegeben ist die in  $\mathbb{R}$  definierte Funktion  $f$  mit  $f(x) = (x + 2) \cdot e^{-x}$ . Für die erste Ableitungsfunktion von  $f$  gilt  $f'(x) = -(x + 1) \cdot e^{-x}$ .

a Geben Sie die Koordinaten der Schnittpunkte des Graphen von  $f$  mit den Koordinatenachsen an. Begründen Sie, dass der Graph von  $f$  einen Hochpunkt hat, und geben Sie die Koordinaten dieses Hochpunkts an.

b Geben Sie den Grenzwert von  $f$  für  $x \rightarrow +\infty$  an und beschreiben Sie den Verlauf des Graphen von  $f$  für  $x \rightarrow +\infty$ .

c Eine der Abbildungen I, II und III zeigt den Graphen von  $f$ . Geben Sie diese Abbildung an und begründen Sie Ihre Angabe.



d Die Tangente an den Graphen von  $f$  im Punkt  $(0 | f(0))$  schließt mit den Koordinatenachsen ein Dreieck ein. Berechnen Sie den Umfang dieses Dreiecks und

BE

5

2

2

5

<sup>1</sup> verwendete Abkürzungen: AG/LA - Analytische Geometrie/Lineare Algebra, AG/LA (A1) - Analytische Geometrie/Lineare Algebra (Alternative A1), AG/LA (A2) - Analytische Geometrie/Lineare Algebra (Alternative A2)

geben Sie die Koordinaten des Punkts an, der von allen Eckpunkten des Dreiecks den gleichen Abstand hat.

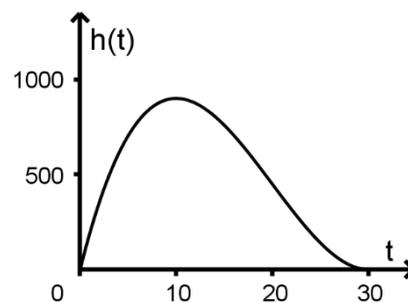
Der Graph einer Funktion  $g$  kann aus dem Graphen von  $f$  schrittweise erzeugt werden durch:

- ◆ Spiegelung an der  $x$ -Achse
- ◆ Streckung mit dem Faktor  $\frac{1}{e}$  in  $y$ -Richtung
- ◆ Verschiebung um 1 in positive  $x$ -Richtung

e Zeigen Sie, dass  $g(x) = f'(x)$  gilt.

f Bestimmen Sie unter Verwendung der genannten Schritte, mit denen der Graph von  $g$  aus dem Graphen von  $f$  erzeugt werden kann, reelle Zahlen  $a$ ,  $b$  und  $k$ , für die  $\int_0^2 f(x) dx = k \cdot \int_a^b g(x) dx$  gilt.

2 Ein Tauchroboter bewegt sich in vertikaler Richtung. Diese Bewegung lässt sich für  $0 \leq t \leq 30$  modellhaft mithilfe der in  $\mathbb{R}$  definierten Funktion  $h: t \mapsto \frac{9}{40}t^3 - \frac{27}{2}t^2 + \frac{405}{2}t$  beschreiben. Dabei ist  $t$  die seit Beobachtungsbeginn vergangene Zeit in Minuten und  $h(t)$  der Abstand des Roboters von der Wasseroberfläche in Metern. Die Abbildung stellt die Bewegung des Roboters dar.



- a Weisen Sie nach, dass der Roboter zum Zeitpunkt 10 Minuten nach Beobachtungsbeginn den größten Abstand zur Wasseroberfläche hat und dass dieser Abstand 900 Meter beträgt.
- b Berechnen Sie, wie viele Meter der Roboter innerhalb der ersten 15 Minuten nach Beobachtungsbeginn zurücklegt.
- c Beschreiben Sie die Bedeutung des Wendepunkts des Graphen von  $h$  im Hinblick auf die Bewegung des Roboters.
- d Betrachtet wird die Phase, in der der Roboter seinen Abstand zur Wasseroberfläche vergrößert. Berechnen Sie den Zeitraum innerhalb dieser Phase, in dem die Geschwindigkeit des Roboters größer als 29,7 Meter pro Minute ist.

4

4

3

3

2

5

35

## 2 Erwartungshorizont

Der Erwartungshorizont stellt für jede Teilaufgabe eine mögliche Lösung dar. Nicht dargestellte korrekte Lösungen sind als gleichwertig zu akzeptieren.

		BE
1	<p><b>a</b> Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen: <math>(-2 0)</math>, <math>(0 2)</math>  <math>f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1</math>, <math>f'(x) &gt; 0</math> für <math>x &lt; -1</math> und <math>f'(x) &lt; 0</math> für <math>x &gt; -1</math>                      Hochpunkt: <math>(-1 e)</math></p>	5
	<p><b>b</b> <math>\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0</math>                      Der Graph von <math>f</math> nähert sich der <math>x</math>-Achse asymptotisch.</p>	2
	<p><b>c</b> Es gilt <math>f(1) \approx 1,1</math>. Dazu passt nur die Abbildung II.</p>	2
	<p><b>d</b> <math>f'(0) = -1</math>, d. h. die Tangente schneidet die <math>x</math>-Achse im Punkt <math>(2 0)</math>. Damit beträgt der gesuchte Umfang <math>2 + 2 + \sqrt{2^2 + 2^2} = 4 + \sqrt{8}</math>.                      Gesuchter Punkt: <math>(1 1)</math></p>	5
	<p><b>e</b> <math>g(x) = -\frac{1}{e} \cdot ((x-1) + 2) \cdot e^{-x+1} = -\frac{1}{e} \cdot (x+1) \cdot e^{-x} \cdot e = -(x+1) \cdot e^{-x} = f'(x)</math></p>	4
	<p><b>f</b> Damit die Gleichung erfüllt ist, müssen die Unterschiede zwischen den Graphen von <math>f</math> und <math>g</math> rechnerisch ausgeglichen werden: die Spiegelung durch einen Faktor <math>-1</math>, die Streckung durch einen Faktor <math>e</math> und die Verschiebung durch entsprechende Verschiebung der Integrationsgrenzen.                      Damit: <math>a = 1</math>, <math>b = 3</math>, <math>k = -e</math></p>	4
2	<p><b>a</b> <math>h'(t) = \frac{27}{40} \cdot t^2 - 27t + \frac{405}{2}</math>, <math>h'(10) = 0</math>                      In Verbindung mit der Abbildung ergibt sich, dass <math>h</math> für <math>0 \leq t \leq 30</math> bei 10 sein Maximum annimmt.  <math>h(10) = 900</math></p>	3
	<p><b>b</b> <math>900 + 900 - h(15) \approx 1040</math>, d. h. der Roboter legt etwa 1040 Meter zurück.</p>	3
	<p><b>c</b> Die <math>t</math>-Koordinate des Wendepunkts gibt den Zeitpunkt an, zu dem der Roboter während des Aufstiegens die größte Geschwindigkeit hat.</p>	2
	<p><b>d</b> <math>h'(t) = 29,7 \Leftrightarrow t^2 - 40t + 256 = 0</math> liefert <math>t_1 = 20 - \sqrt{400 - 256} = 8</math> und <math>t_2 = 32</math>.                      In Verbindung mit der Abbildung ergibt sich, dass der gesuchte Zeitraum vom Beobachtungsbeginn bis 8 Minuten nach Beobachtungsbeginn dauert.</p>	5
		35

### 3 Standardbezug

Teilaufgabe	BE	allgemeine mathematische Kompetenzen						Anforderungsbereich		
		K1	K2	K3	K4	K5	K6	I	II	III
1 a	5	I			I	I		X		
b	2	I			I		I	X		
c	2	I			I			X		
d	5	II	II			I			X	
e	4		II			II	I		X	
f	4	III	II		II		II			X
2 a	3	I		I		I	I	X		
b	3		II	I		I			X	
c	2	II		II			I		X	
d	5	II	III	II	I	II	II			X

### 4 Bewertungshinweise

Die Bewertung der erbrachten Prüfungsleistungen hat sich für jede Teilaufgabe nach der am rechten Rand der Aufgabenstellung angegebenen Anzahl maximal erreichbarer Bewertungseinheiten (BE) zu richten.

Für die Bewertung der Gesamtleistung eines Prüflings ist passend zur Konzeption der Aufgaben der Aufgabensammlung und des Abituraufgabenpools ein Bewertungsraster<sup>2</sup> vorgesehen, das angibt, wie die in den Prüfungsteilen A und B insgesamt erreichten Bewertungseinheiten in Notenpunkte umgesetzt werden.

<sup>2</sup> Das Bewertungsraster ist Teil des Dokuments „Beschreibung der Struktur“, das auf den Internetseiten des IQB zum Download bereitsteht.