Institut zur Qualitätsentwicklung im Bildungswesen

KULTUSMINISTER KONFERENZ

Gemeinsame Abituraufgabenpools der Länder

Pool für das Jahr 2022

Aufgaben für das Fach Mathematik

Kurzbeschreibung

Anforderungsniveau	Prüfungsteil	Sachgebiet[1]	digitales Hilfsmittel
grundlegend	B	Analysis	WTR

1 Aufgabe

BE

1 Die Abbildung 1 zeigt den Graphen G_f der in $\mathbb{R}$ definierten Funktion f mit $f(x)=\frac{1}{80}x^5-\frac{1}{6}x^3+x$.

Der Punkt $W(2\,|\,f(2))$ ist ein Wendepunkt von G_f.

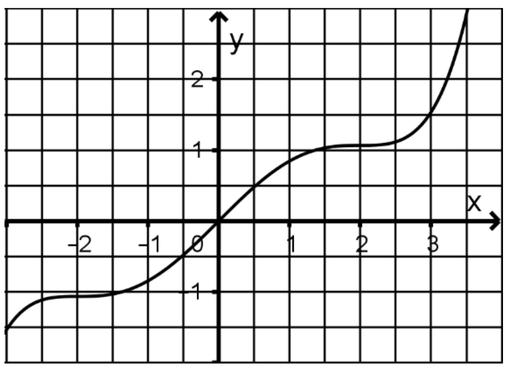


Abb. 1

a Geben Sie die Nullstelle von f an und begründen Sie Ihre Angabe anhand des Terms von f. 2

b Begründen Sie ohne zu rechnen, dass auch der Punkt $(-2\,|\,f(-2))$ ein Wendepunkt von G_f ist. 2

c Zeigen Sie, dass $f'(x)=\frac{1}{16}\cdot(x-2)^2\cdot(x+2)^2$ gilt. 3

Betrachtet werden die Tangente an G_f im Koordinatenursprung und die Tangente an G_f im Punkt W.

d Weisen Sie nach, dass sich die beiden betrachteten Tangenten im Punkt $\left(\frac{16}{15}\,\middle|\,\frac{16}{15}\right)$ schneiden. Zeichnen Sie die beiden Tangenten in die Abbildung 1 ein. 5

[1] verwendete Abkürzungen: AG/LA - Analytische Geometrie/Lineare Algebra, AG/LA (A1) - Analytische Geometrie/Lineare Algebra (Alternative A1), AG/LA (A2) - Analytische Geometrie/Lineare Algebra (Alternative A2)

e Begründen Sie geometrisch, dass der Wert des Integrals $\int_0^2 f(x)\,dx$ und der Wert des Terms $\frac{1}{2}\cdot\left(2+\frac{14}{15}\right)\cdot\frac{16}{15}$ annähernd übereinstimmen. 3

f In der Teilaufgabe e ist der Wert des Integrals $\int_0^2 f(x)\,dx$ näherungsweise angegeben. Berechnen Sie die prozentuale Abweichung des angegebenen Näherungswerts vom exakten Wert des Integrals. 4

g Die Funktion f kann im Intervall $[-2;2]$ in guter Näherung durch die Funktion g mit $g(x)=a\cdot\sin(bx)$ und $a,b\in\mathbb{R}^+$ beschrieben werden. Dabei gilt: 4

- 2 ist Extremstelle von g;
- an der Stelle 2 stimmen die Funktionswerte von f und g überein.

Ermitteln Sie für a und b jeweils den passenden Wert.

2 Übertöpfe sind Gefäße, in die Pflanztöpfe gestellt werden können. Betrachtet werden rotationssymmetrische Übertöpfe mit einer kreisförmigen Grundfläche und einer Höhe von 40 cm.

Die Abbildung 2 zeigt für einen solchen Übertopf die Profillinie eines Längsschnitts entlang der Rotationsachse des Übertopfs. Die Rotationsachse wird durch die y-Achse dargestellt. Die Profillinie des Mantels kann mithilfe der in $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ definierten Funktion h mit $h(x)=5-\frac{10}{x^2}$ beschrieben werden.

Eine Längeneinheit im Koordinatensystem entspricht 10 cm in der Realität.

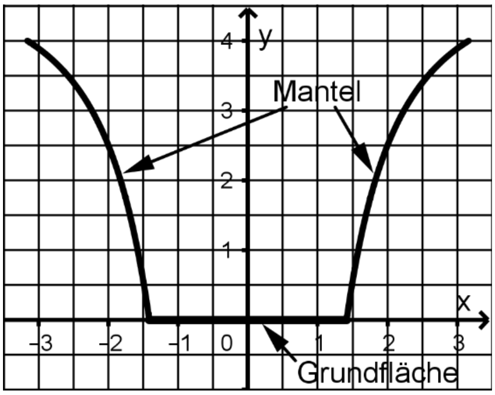


Abb. 2

a Zeigen Sie rechnerisch für den in der Abbildung 2 dargestellten Übertopf, dass die Grundfläche einen Durchmesser von etwa 28 cm hat. 3

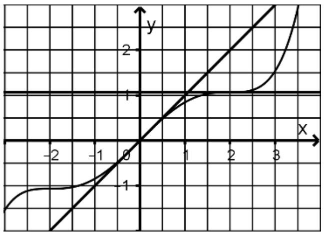
b Untersuchen Sie, ob ein zylinderförmiger Pflanztopf mit einem Durchmesser von 24 cm und einem Volumen von 16 Litern in den in der Abbildung 2 dargestellten Übertopf hineinpasst, ohne über den oberen Rand des Übertopfs hinauszuragen. 4

c Für jeden der betrachteten Übertöpfe kann – in einem Längsschnitt entlang der Rotationsachse des Übertopfs – die Profillinie des Mantels mithilfe einer der in $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ definierten Funktionen h_k mit $h_k(x)=k-\frac{10}{x^2}$ und $k\in\,]4;+\infty[$ beschrieben werden. Berechnen Sie denjenigen Wert von k, für den der Radius des oberen Rands des Übertopfs doppelt so groß ist wie der Radius seiner Grundfläche. 5

35

2 Erwartungshorizont

Der Erwartungshorizont stellt für jede Teilaufgabe eine mögliche Lösung dar. Nicht dargestellte korrekte Lösungen sind als gleichwertig zu akzeptieren.

			BE
1	**a**	$x=0$ Begründung: $f(x)$ ist ein Polynom ohne konstanten Summanden.	2
	b	Das Polynom $f(x)$ enthält nur Potenzen von x mit ungeraden Exponenten. Damit ist G_f symmetrisch bezüglich des Koordinatenursprungs.	2
	c	$f'(x)=\frac{1}{16}x^4-\frac{1}{2}x^2+1=\frac{1}{16}\cdot\left(x^4-8x^2+16\right)=\frac{1}{16}\cdot\left(x^2-4\right)^2=\frac{1}{16}\cdot\left((x-2)\cdot(x+2)\right)^2$	3
	d	$f'(0)=1,\ f'(2)=0,\ f(2)=\frac{16}{15}$ Die beiden Tangenten werden also durch $t_1(x)=x$ bzw. $t_2(x)=\frac{16}{15}$ beschrieben. Es gilt: $t_1\left(\frac{16}{15}\right)=t_2\left(\frac{16}{15}\right)=\frac{16}{15}$. 	5
	e	Der Wert des Integrals stimmt näherungsweise mit dem Inhalt des Trapezes überein, dessen Höhe $\frac{16}{15}$ beträgt und dessen parallele Seiten die Längen 2 bzw. $\frac{14}{15}$ haben.	3
	f	$\int_0^2 f(x)\,dx=\left[\frac{1}{480}x^6-\frac{1}{24}x^4+\frac{1}{2}x^2\right]_0^2=\frac{22}{15}$ $\frac{\frac{1}{2}\cdot\left(2+\frac{14}{15}\right)\cdot\frac{16}{15}-\frac{22}{15}}{\frac{22}{15}}\approx 7\,\%$	4
	g	$2b=\frac{\pi}{2}\Leftrightarrow b=\frac{\pi}{4},\ g(2)=\frac{16}{15}\Leftrightarrow a=\frac{16}{15}$	4
2	**a**	$h(x)=0\Leftrightarrow 5-\frac{10}{x^2}=0\Leftrightarrow x=-\sqrt{2}\vee x=\sqrt{2},\ 2\cdot\sqrt{2}\cdot 10\,\text{cm}\approx 28\,\text{cm}$	3
	b	$\pi\cdot(12\,\text{cm})^2\cdot h=16\,000\,\text{cm}^3$ liefert $h\approx 35\,\text{cm}$. Mit einem Durchmesser von 24 cm und einer Höhe von etwa 35 cm passt der Pflanztopf in den Übertopf hinein.	4
	c	Für $x>0$ gilt: $h_k(x)=0\Leftrightarrow k-\frac{10}{x^2}=0\Leftrightarrow x=\sqrt{\frac{10}{k}},\ h_k(x)=4\Leftrightarrow k-\frac{10}{x^2}=4\Leftrightarrow x=\sqrt{\frac{10}{k-4}}$ $\sqrt{\frac{10}{k-4}}=2\cdot\sqrt{\frac{10}{k}}\Leftrightarrow\frac{10}{k-4}=4\cdot\frac{10}{k}\Leftrightarrow 4\cdot(k-4)=k\Leftrightarrow k=\frac{16}{3}$	5
			35

3 Standardbezug

Teilaufgabe	BE	allgemeine mathematische Kompetenzen						Anforderungsbereich		
		K1	K2	K3	K4	K5	K6	I	II	III
1 a	2	I			I			X		
b	2	I	I		I		I	X		
c	3					I		X		
d	5	II	II		I	I			X	
e	3	II			III		II			X
f	4					II			X	
g	4	II	II		I	II	II		X	
2 a	3		I	I	I	I	I	X		
b	4		II	II		I			X	
c	5		III	II		II				X

4 Bewertungshinweise

Die Bewertung der erbrachten Prüfungsleistungen hat sich für jede Teilaufgabe nach der am rechten Rand der Aufgabenstellung angegebenen Anzahl maximal erreichbarer Bewertungseinheiten (BE) zu richten.

Für die Bewertung der Gesamtleistung eines Prüflings ist passend zur Konzeption der Aufgaben der Aufgabensammlung und des Abituraufgabenpools ein Bewertungsraster[2] vorgesehen, das angibt, wie die in den Prüfungsteilen A und B insgesamt erreichten Bewertungseinheiten in Notenpunkte umgesetzt werden.

[2] Das Bewertungsraster ist Teil des Dokuments „Beschreibung der Struktur“, das auf den Internetseiten des IQB zum Download bereitsteht.