

Gemeinsame Abituraufgabenpools der Länder

## Pool für das Jahr 2022

Aufgaben für das Fach Mathematik

### Kurzbeschreibung

Anforderungsniveau	Prüfungsteil	Sachgebiet <sup>1</sup>	digitales Hilfsmittel
grundlegend	B	Analysis	MMS

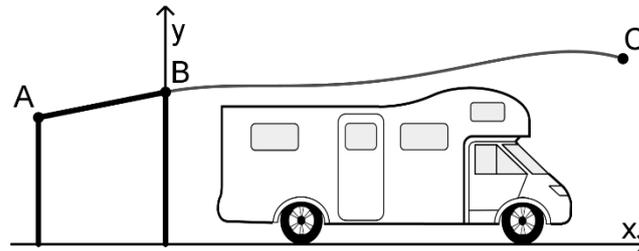
### 1 Aufgabe

Gegeben ist die in  $\mathbb{R}$  definierte Funktion  $f$  mit  $f(x) = -\frac{1}{640}x^4 + \frac{1}{40}x^3 - \frac{9}{80}x^2 + \frac{1}{5}x + 3$ .

- |   |           |
|---|-----------|
|   | <b>BE</b> |
| <b>a</b> Zeigen Sie, dass der Graph von $f$ durch den Punkt $P(12 0)$ verläuft. Geben Sie eine Gleichung der Tangente an den Graphen von $f$ im Punkt $Q(2 f(2))$ an und beschreiben Sie deren besondere Lage im Koordinatensystem.   | 3         |
| <b>b</b> Die erste Ableitungsfunktion $f'$ von $f$ kann durch eine Gleichung der Form $f'(x) = a \cdot (x - b) \cdot (x - c)^2$ dargestellt werden. Ermitteln Sie die passenden Werte von $a$ , $b$ und $c$ .   | 3         |
| <b>c</b> Beurteilen Sie jede der beiden folgenden Aussagen mithilfe des Graphen von $f'$ :  | 4         |
| <b>I</b> Die Funktion $f$ ist monoton.  |           |
| <b>II</b> Die Tangenten an den Graphen von $f$ in den Punkten $(0 f(0))$ und $(6 f(6))$ sind parallel.  |           |
| <b>d</b> Der Graph der in $\mathbb{R}$ definierten Funktion $h$ mit $h(x) = f'(x + 4) - f'(4)$ , wobei $f'(4) = \frac{1}{10}$ gilt, ist symmetrisch bezüglich des Koordinatenursprungs. Geben Sie die Symmetrie des Graphen von $f'$ an und begründen Sie Ihre Angabe ausgehend vom Graphen von $h$ . | 4         |

<sup>1</sup> verwendete Abkürzungen: AG/LA - Analytische Geometrie/Lineare Algebra, AG/LA (A1) - Analytische Geometrie/Lineare Algebra (Alternative A1), AG/LA (A2) - Analytische Geometrie/Lineare Algebra (Alternative A2)

Die Abbildung zeigt einen Längsschnitt eines Carports für ein Wohnmobil; dabei ist der hintere Bereich des Carports fett dargestellt. Das Dach des Carports ist in Querrichtung nicht geneigt. Im Folgenden sollen die Materialstärken der Bauteile des Carports vernachlässigt werden.



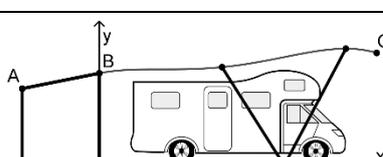
Die Profillinie des Längsschnitts des Dachs kann zwischen den Punkten  $A(x_A | 2,5)$  und  $B(0 | f(0))$  modellhaft mithilfe der Gerade  $g$  mit der Gleichung  $y = \frac{1}{5}x + 3$  beschrieben werden, zwischen den Punkten  $B$  und  $C(9 | f(9))$  mithilfe der Funktion  $f$ . Eine Längeneinheit im Koordinatensystem entspricht einem Meter in der Wirklichkeit. Die  $x$ -Achse stellt den horizontalen Untergrund dar.

- e** Zeigen Sie, dass der Carport 11,50 m lang ist, und bestimmen Sie die Höhe des Carports an seiner höchsten Stelle. Untersuchen Sie, ob ein Wohnmobil mit einer Länge von 7,05 m und einer Höhe von 3,10 m vollständig im Carport untergestellt werden kann. 6
- f** Bestimmen Sie für den gesamten Teil des Dachs, von dem Wasser über den hinteren Bereich des Carports hinweg abläuft, die durchschnittliche Neigung in Längsrichtung in Prozent. 3
- g** Abgesehen von einem 20 cm hohen Streifen unmittelbar über dem Untergrund ist der Carport auf einer Seite über seine gesamte Länge vollständig verkleidet. Die Verkleidung ist eben und vertikal angebracht. Berechnen Sie den Inhalt der verkleideten Fläche. 5
- Ausgehend vom selben Punkt des Untergrunds verlaufen entlang der seitlichen Verkleidung des Carports zwei geradlinige Stützen jeweils bis zum Dach. Die Stützen schließen einen Winkel mit einer Größe von  $60^\circ$  ein. Die Endpunkte der ersten Stütze werden im Modell durch  $D(6 | 0)$  und  $E(8 | f(8))$  dargestellt.
- h** Zeichnen Sie die beiden Stützen in die Abbildung ein. 2
- i** Berechnen Sie die  $x$ -Koordinate des Punkts, der den Endpunkt der zweiten Stütze am Dach darstellt. 5

35

## 2 Erwartungshorizont

Der Erwartungshorizont stellt für jede Teilaufgabe eine mögliche Lösung dar. Nicht dargestellte korrekte Lösungen sind als gleichwertig zu akzeptieren.

	BE
<b>a</b> $f(12) = 0$ Gleichung der Tangente: $y = \frac{25}{8}$ Die Tangente verläuft parallel zur x-Achse.	3
<b>b</b> $f'(x) = -\frac{1}{160} \cdot (x-8) \cdot (x-2)^2$ , d. h. $a = -\frac{1}{160}$ , $b = 8$ und $c = 2$ .	3
<b>c</b> I: Die Aussage ist falsch, da der Graph von $f'$ Punkte auf beiden Seiten der x-Achse hat. II: Die Aussage ist richtig, da die Punkte des Graphen von $f'$ mit den x-Koordinaten 0 und 6 die gleiche y-Koordinate haben.	4
<b>d</b> Der Graph von $h$ kann aus dem Graphen von $f'$ erzeugt werden durch eine Verschiebung um 4 in negative x-Richtung und um $f'(4)$ in negative y-Richtung. Damit ist auch der Graph von $f'$ punktsymmetrisch, und zwar bezüglich des Punkts $(4   f'(4))$ .	4
<b>e</b> $2,5 = \frac{1}{5}x_A + 3 \Leftrightarrow x_A = -2,5$ , d. h. die Länge beträgt $2,50\text{ m} + 9,00\text{ m} = 11,50\text{ m}$ . Für $0 \leq x \leq 9$ hat $f$ das Maximum 3,8. Die gesuchte Höhe ist also 3,80 m. Für $0 \leq x \leq 9$ liefert $f(x) = 3,10$ die Lösung $x \approx 0,80$ . In Verbindung mit der Abbildung ergibt sich, dass der Carport auf einer Länge von etwa 8,20 m ausreichend hoch ist. Das Wohnmobil kann also vollständig untergestellt werden.	6
<b>f</b> Für $0 \leq x \leq 9$ nimmt $f$ sein Maximum bei $x = 8$ an. $\frac{3,8-2,5}{2,5+8} \approx 12\%$	3
<b>g</b> $\frac{1}{2} \cdot (2,5 + f(0)) \cdot 2,5 + \int_0^9 f(x) dx - 11,5 \cdot 0,2 \approx 35$ Der Flächeninhalt beträgt etwa $35\text{ m}^2$ .	5
<b>h</b> 	2
<b>i</b> Größe des Neigungswinkels der ersten Stütze: $\tan \alpha = \frac{f(8)}{2}$ , d. h. $\alpha \approx 62^\circ$ Damit gilt für die Größe des Neigungswinkels der zweiten Stütze $\beta \approx 58^\circ$ . Für $0 \leq x \leq 9$ liefert $\tan \beta = \frac{f(x)}{6-x}$ : $x \approx 4$	5
	35

### 3 Standardbezug

Teilaufgabe	BE	allgemeine mathematische Kompetenzen						Anforderungsbereich		
		K1	K2	K3	K4	K5	K6	I	II	III
a	3					I	I	X		
b	3					I		X		
c	4	I			I		I	X		
d	4	III			II		II			X
e	6	II	II	II	I	I			X	
f	3	II		II	I	I	II		X	
g	5			II	I	I			X	
h	2				II		I		X	
i	5		III	II		II				X

### 4 Bewertungshinweise

Die Bewertung der erbrachten Prüfungsleistungen hat sich für jede Teilaufgabe nach der am rechten Rand der Aufgabenstellung angegebenen Anzahl maximal erreichbarer Bewertungseinheiten (BE) zu richten.

Für die Bewertung der Gesamtleistung eines Prüflings ist passend zur Konzeption der Aufgaben der Aufgabensammlung und des Abituraufgabenpools ein Bewertungsraster<sup>2</sup> vorgesehen, das angibt, wie die in den Prüfungsteilen A und B insgesamt erreichten Bewertungseinheiten in Notenpunkte umgesetzt werden.

<sup>2</sup> Das Bewertungsraster ist Teil des Dokuments „Beschreibung der Struktur“, das auf den Internetseiten des IQB zum Download bereitsteht.