Gemeinsame Abituraufgabenpools der Länder

Pool für das Jahr 2022

Aufgaben für das Fach Mathematik

Kurzbeschreibung

Anforderungsniveau	Prüfungsteil	Sachgebiet[1]	digitales Hilfsmittel
erhöht	B	Analysis	MMS

1 Aufgabe

BE

1 Ein ICE fährt bis 15:00 Uhr mit konstanter Geschwindigkeit. Von 15:00 Uhr bis 15:02 Uhr nimmt seine Geschwindigkeit ab. Ab 15:02 Uhr fährt der ICE wieder mit konstanter Geschwindigkeit. Zur modellhaften Beschreibung der Entwicklung der Geschwindigkeit des ICE im Zeitraum von 15:00 Uhr bis 15:02 Uhr wird eine Schar ganzrationaler Funktionen betrachtet.

Die Geschwindigkeitsentwicklung von 15:00 Uhr bis 15:02 Uhr wird zunächst mithilfe der in $\mathbb{R}$ definierten Funktion f der Schar mit $f(x)=30x^3-90x^2+240$ beschrieben. Dabei ist x die seit 15:00 Uhr vergangene Zeit in Minuten und $f(x)$ die Geschwindigkeit in Kilometer pro Stunde.

Die Abbildung 1 zeigt für $0 \le x \le 2$ den Graphen von f; außerdem stellt sie die Geschwindigkeiten des ICE vor 15:00 Uhr und nach 15:02 Uhr dar.

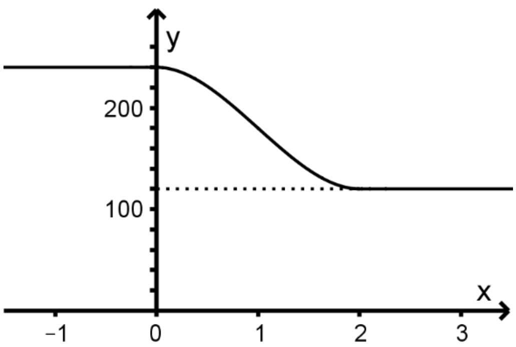


Abb. 1

[1] verwendete Abkürzungen: AG/LA - Analytische Geometrie/Lineare Algebra, AG/LA (A1) - Analytische Geometrie/Lineare Algebra (Alternative A1), AG/LA (A2) - Analytische Geometrie/Lineare Algebra (Alternative A2)

a Bestimmen Sie die Geschwindigkeit, die der ICE eine halbe Minute nach 15:00 Uhr hat. Zeigen Sie, dass die Geschwindigkeit in der ersten halben Minute nach 15:00 Uhr um einen kleineren Betrag abnimmt als in der darauf folgenden halben Minute. 4

b Ermitteln Sie den Zeitpunkt, zu dem die Geschwindigkeit am stärksten abnimmt. 2

c Bestimmen Sie einen Zeitraum, der frühestens um 14:59 Uhr beginnt und spätestens um 15:03 Uhr endet, in dem der ICE eine Strecke mit einer Länge von genau 7 km zurücklegt. 5

d Untersuchen Sie, ob die folgende Aussage richtig ist: 4

Wenn sich die Abnahme der Geschwindigkeit von 15:01 Uhr an nicht mehr verändern würde, dann käme der ICE von diesem Zeitpunkt an nach drei Kilometern zum Stehen.

Nun werden alle in $\mathbb{R}$ definierten Funktionen f_p der Schar mit $f_p(x) = \frac{p}{4} \cdot x^4 + (30 - p) \cdot x^3 + (p - 90) \cdot x^2 + 240$ und $p \in \mathbb{R}$ daraufhin untersucht, ob sie für $0 \leq x \leq 2$ die Entwicklung der Geschwindigkeit des ICE von 15:00 Uhr bis 15:02 Uhr passend beschreiben könnten.

e Der Übergang von der Fahrt mit konstanter Geschwindigkeit vor 15:00 Uhr zur Fahrt nach 15:00 Uhr erfolgt sowohl hinsichtlich der Geschwindigkeit als auch hinsichtlich der momentanen Änderungsrate der Geschwindigkeit ohne Sprung. Die Funktionen f_p werden diesen beiden Anforderungen gerecht. Geben Sie die zugehörigen Bedingungen an, die die Funktionen f_p erfüllen. 2

f Geben Sie denjenigen Wert von p an, für den $f_p(x)$ mit dem Term der Funktion f übereinstimmt. Beurteilen Sie für jede der Funktionen f_{-80} und f_{250} mithilfe des zugehörigen Graphen, ob die Funktion die Geschwindigkeitsentwicklung innerhalb des Zeitraums von 15:00 Uhr bis 15:02 Uhr passend beschreiben könnte. 4

g Gegeben sind die folgenden Informationen: 4

Für $p \neq 0$ liefert $f_p'(x) = 0$ neben $x_1 = 0$ und $x_2 = 2$ die Lösung $x_3 = 1 - \frac{90}{p}$.

Es gilt $x_3 \leq 0 \Leftrightarrow 0 < p \leq 90$ und $x_3 \geq 2 \Leftrightarrow -90 \leq p < 0$.

Beurteilen Sie auch unter Verwendung dieser Informationen die Funktionen f_p mit $p \neq 0$ im Hinblick auf ihre Eignung zur Beschreibung der angenommenen Geschwindigkeitsentwicklung innerhalb des Zeitraums von 15:00 Uhr bis 15:02 Uhr.

2 Betrachtet wird die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion s mit $s(x) = a \cdot \sin(b \cdot x) + c$. Die Punkte $E_1(-2 \mid -1)$ und $E_2(2 \mid 3)$ sind direkt aufeinanderfolgende Extrempunkte des Graphen von s.

a Bestimmen Sie die passenden Werte von a, b und c. 4

(zur Kontrolle: $a = 2$, $b = \frac{\pi}{4}$, $c = 1$)

b Berechnen Sie den Wert des Terms 6

$$\int_{-2}^{2} s(x)\,dx\,.$$

Beschreiben Sie mithilfe der Abbildung 2, wie man zu diesem Wert mit geometrischen Überlegungen gelangen kann.

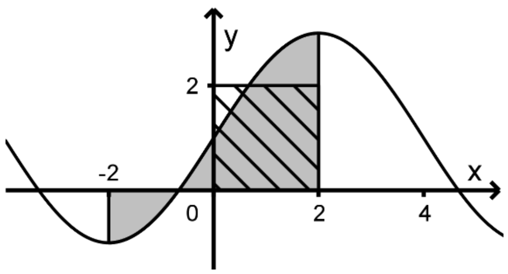


Abb. 2

Die Punkte des Graphen von s mit der y-Koordinate 1 sind die Wendepunkte des Graphen.

c Zeigen Sie, dass jeder Wendepunkt des Graphen von s eine ganzzahlige x-Koordinate hat und dass der Graph von s in jedem seiner Wendepunkte entweder die Steigung $-\frac{\pi}{2}$ oder die Steigung $+\frac{\pi}{2}$ hat. 2

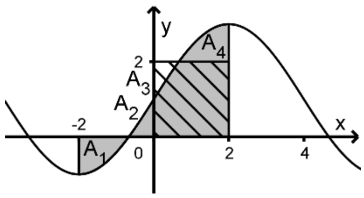
d Für jeden Wendepunkt des Graphen von s wird die Gerade betrachtet, die durch diesen Wendepunkt und den Punkt $P(2022\,|\,2022)$ verläuft. Untersuchen Sie, ob eine dieser Geraden im jeweiligen Wendepunkt Tangente an den Graphen von s ist. 3

40

2 Erwartungshorizont

Der Erwartungshorizont stellt für jede Teilaufgabe eine mögliche Lösung dar. Nicht dargestellte korrekte Lösungen sind als gleichwertig zu akzeptieren.

			BE
1	a	$f(0{,}5)=221{,}25$, die Geschwindigkeit beträgt also etwa $220\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$. $f(0)-f(0{,}5)=18{,}75$, $f(0{,}5)-f(1)=41{,}25$	4
	b	f' nimmt sein Minimum bei $x=1$ an. Der gesuchte Zeitpunkt ist also 15:01 Uhr.	2
	c	$\frac{1}{60}\cdot\int_0^2 f(x)\,dx=6$ $\frac{1}{60}\cdot f(2)\cdot x=1 \Leftrightarrow x=0{,}5$ Ein solcher Zeitraum beginnt um 15:00 Uhr und endet 2,5 Minuten später.	5
	d	Die Tangente an den Graphen von f im Punkt $(1\,|\,f(1))$ hat die Gleichung $y=-90x+270$. Diese Tangente hat die Nullstelle 3 und schließt mit der x-Achse und der Gerade mit der Gleichung $x=1$ eine Fläche mit dem Inhalt $\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{60}\cdot f(1)=3$ ein. Die Aussage ist also richtig.	4
	e	$f_p(0)=240$, $f_p'(0)=0$	2
	f	$p=0$	4

		Der Graph von f_{250} hat für $0<x<2$ einen Extrempunkt, der von f_{-80} nicht. Damit könnte nur f_{-80} die Geschwindigkeitsentwicklung passend beschreiben.	
	g	Für $p \neq 0$ nimmt f_p nur für $-90 \leq p < 0$ und $0 < p \leq 90$ im Bereich $0<x<2$ kein Extremum an. Nur für diese Werte von p könnten die Funktionen f_p also die angenommene Geschwindigkeitsentwicklung passend beschreiben.	4
2	**a**	$c=\frac{1}{2}\cdot(3+(-1))=1,\ a=\frac{1}{2}\cdot(3-(-1))=2,\ b=\frac{\pi}{2-(-2)}=\frac{\pi}{4}$	4
	b	$\int_{-2}^{2} s(x)\,dx=4$  Der Graph von s ist symmetrisch bezüglich des Punkts $(0\|1)$. Damit haben die Flächenstücke A_1 und A_4 ebenso den gleichen Inhalt wie die Flächenstücke A_2 und A_3. Aufgrund der Lage dieser Flächenstücke bezüglich der x-Achse und bezüglich des abgebildeten Quadrats, stimmt der Wert des Terms mit dem Flächeninhalt des Quadrats überein, ist also $2^2=4$.	6
	c	$s(x)=1 \Leftrightarrow x=4k,\ k\in\mathbb{Z}$ Für alle $k\in\mathbb{Z}$ gilt $s'(4k)=-\frac{\pi}{2} \vee s'(4k)=\frac{\pi}{2}$.	2
	d	Die Wendepunkte haben die Koordinaten $(4k\|1)$ mit $k\in\mathbb{Z}$. Damit haben die betrachteten Geraden die Steigungen $\frac{2021}{2022-4k}$. Die Tangenten in den Wendepunkten haben entweder die Steigung $-\frac{\pi}{2}$ oder die Steigung $+\frac{\pi}{2}$. Da $\frac{2021}{2022-4k}$ für jeden Wert von $k\in\mathbb{Z}$ eine rationale Zahl ist, ist keine der Geraden im jeweiligen Wendepunkt Tangente an den Graphen von s.	3
			40

3 Standardbezug

Teilaufgabe	BE	allgemeine mathematische Kompetenzen						Anforderungsbereich		
		K1	K2	K3	K4	K5	K6	I	II	III
1 a	4			I		I	I	X		
b	2			II		I			X	
c	5		II	II		II			X	
d	4		III	II		II	II			X
e	2			I	I		I	X		
f	4	I		I	I		I	X		
g	4	III		III	II		II			X
2 a	4	II	II			I			X	
b	6	II			II	I	II		X	
c	2		II			I			X	
d	3	III	III			I	III			X

4 Bewertungshinweise

Die Bewertung der erbrachten Prüfungsleistungen hat sich für jede Teilaufgabe nach der am rechten Rand der Aufgabenstellung angegebenen Anzahl maximal erreichbarer Bewertungseinheiten (BE) zu richten.

Für die Bewertung der Gesamtleistung eines Prüflings ist passend zur Konzeption der Aufgaben der Aufgabensammlung und des Abituraufgabenpools ein Bewertungsraster[2] vorgesehen, das angibt, wie die in den Prüfungsteilen A und B insgesamt erreichten Bewertungseinheiten in Notenpunkte umgesetzt werden.

[2] Das Bewertungsraster ist Teil des Dokuments „Beschreibung der Struktur“, das auf den Internetseiten des IQB zum Download bereitsteht.