Gemeinsame Abituraufgabenpools der Länder

Pool für das Jahr 2022

Aufgaben für das Fach Mathematik

Kurzbeschreibung

Anforderungsniveau	Prüfungsteil	Sachgebiet[1]	digitales Hilfsmittel
erhöht	B	Stochastik	MMS

1 Aufgabe

	BE
Ein Unternehmen stellt Tischtennisbälle her. 98 % der hergestellten Bälle weichen nur unwesentlich von der Kugelform ab; diese werden im Weiteren als „rund“ bezeichnet, die übrigen als „unrund“.	
1 Aus der großen Menge der hergestellten Bälle werden regelmäßig Stichproben entnommen, wobei die Auswahl der Bälle für jede Stichprobe als zufällig angenommen werden kann. Außerdem kann davon ausgegangen werden, dass die Anzahl der unrunden Bälle in jeder Stichprobe binomialverteilt ist.	
a Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Anzahl unrunder Bälle in einer Stichprobe von 200 Bällen kleiner als der Erwartungswert dieser Anzahl ist.	3
b Betrachtet werden zwei Stichproben von jeweils 200 Bällen. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass in mindestens einer dieser beiden Stichproben mehr als sechs Bälle unrund sind.	3
Nach der Herstellung durchlaufen die Bälle eine Sortieranlage. Dabei wird ein unrunder Ball mit einer Wahrscheinlichkeit von 90 % aussortiert. Allerdings werden auch 5 % der runden Bälle aussortiert.	
c Stellen Sie den Prozess der Herstellung und Sortierung der Bälle in einem beschrifteten Baumdiagramm dar.	3
d Beschreiben Sie die Bedeutung des Terms $0{,}98 \cdot 0{,}05 \cdot 2000$ im Sachzusammenhang.	2

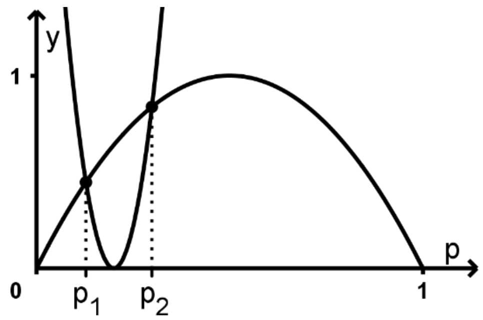
[1] verwendete Abkürzungen: AG/LA - Analytische Geometrie/Lineare Algebra, AG/LA (A1) - Analytische Geometrie/Lineare Algebra (Alternative A1), AG/LA (A2) - Analytische Geometrie/Lineare Algebra (Alternative A2)

e Angenommen, die nicht aussortierten Bälle würden die gleiche Sortieranlage ein zweites Mal durchlaufen. Ermitteln Sie den Anteil der unrunden Bälle unter denjenigen, die dann nach zweimaligem Durchlaufen der Anlage nicht aussortiert wären. 4

2 Das Unternehmen hat zur Herstellung der Bälle eine neue Maschine angeschafft, mit der eine größere Anzahl von Bällen hergestellt werden kann. Für die neue Maschine soll ein Schätzwert für den Anteil unrunder Bälle ermittelt werden, der bei der Herstellung zu erwarten ist. Dazu wird aus Bällen, die mit der neuen Maschine hergestellt wurden, eine Stichprobe entnommen.

Mithilfe der Gleichung $|h-p| = c \cdot \sqrt{\frac{p\cdot(1-p)}{n}}$ wird ein Konfidenzintervall K für den unbekannten Anteil p der unrunden Bälle bestimmt. Dabei ist n der Umfang der Stichprobe, h der Anteil der unrunden Bälle in der Stichprobe und c ein von der gewählten Sicherheitswahrscheinlichkeit abhängiger Faktor.

Die angegebene Gleichung und die Gleichung $n\cdot(h-p)^2 = c^2\cdot p\cdot(1-p)$ liefern die gleichen Lösungen für p. Die Abbildung zeigt die Graphen der Terme $f(p) = n\cdot(h-p)^2$ und $g(p) = c^2\cdot p\cdot(1-p)$.



a Begründen Sie, dass die abgebildeten Stellen p_1 und p_2 die Grenzen des Konfidenzintervalls K sind. 2

b Geben Sie an, ob sich für eine Stichprobe größeren Umfangs bei gleichen Werten von h und c ein im Vergleich zu K kürzeres oder längeres Konfidenzintervall ergeben würde. Begründen Sie Ihre Aussage nur mithilfe der abgebildeten Graphen und der zugehörigen Terme. 4

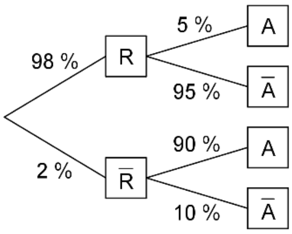
c Für eine Stichprobe von 500 Bällen mit 23 unrunden Bällen ergibt sich das Konfidenzintervall $[0{,}032; p_2]$. Berechnen Sie den Wert von p_2. 4

25

2 Erwartungshorizont

Der Erwartungshorizont stellt für jede Teilaufgabe eine mögliche Lösung dar. Nicht dargestellte korrekte Lösungen sind als gleichwertig zu akzeptieren.

			BE
1	**a**	X: Anzahl der unrunden Bälle $E(X) = 200\cdot 0{,}02 = 4$ $P_{0,02}^{200}(X<4) \approx 43\,\%$	3

	b	$1-\left(P_{0,02}^{200}(X\leq 6)\right)^2 \approx 21\%$	3
	c	 R: „Ein Ball ist rund.“ A: „Ein Ball wird aussortiert.“	3
	d	Der Term gibt für 2000 hergestellte Bälle den Erwartungswert für die Anzahl der aussortierten runden Bälle an.	2
	e	$\frac{0{,}02\cdot 0{,}1^2}{0{,}98\cdot 0{,}95^2+0{,}02\cdot 0{,}1^2} \approx 0{,}023\,\%$	4
2	a	p_1 und p_2 sind die p-Werte, für die sich die Graphen von f und g schneiden, also die Lösungen der zweiten und damit auch der ersten angegebenen Gleichung. Die Lösungen der ersten Gleichung sind die Grenzen des Konfidenzintervalls K.	2
	b	Die Parabel mit dem Hochpunkt gehört zum Term $g(p)$ und ist damit unabhängig von n. Bei einem größeren Wert von n hat der Graph zum Term $f(p)=n\cdot(h-p)^2$ den gleichen Tiefpunkt, verläuft aber steiler. Damit ergibt sich ein kürzeres Konfidenzintervall.	4
	c	$\frac{23}{500}-0{,}032=c\cdot\sqrt{\frac{0{,}032\cdot(1-0{,}032)}{500}} \wedge p_2-\frac{23}{500}=c\cdot\sqrt{\frac{p_2\cdot(1-p_2)}{500}}$ liefert $p_2\approx 0{,}066$.	4
			25

3 Standardbezug

Teilaufgabe	BE	allgemeine mathematische Kompetenzen						Anforderungsbereich		
		K1	K2	K3	K4	K5	K6	I	II	III
1 a	3			I		I	I	X		
b	3	II	II	II		I			X	
c	3				I		I	X		
d	2	II		II	I		I		X	
e	4		III	II		I	II			X
2 a	2	II			II		II		X	
b	4	III			III					X
c	4	II	II		II	II			X	

4 Bewertungshinweise

Die Bewertung der erbrachten Prüfungsleistungen hat sich für jede Teilaufgabe nach der am rechten Rand der Aufgabenstellung angegebenen Anzahl maximal erreichbarer Bewertungseinheiten (BE) zu richten.

Für die Bewertung der Gesamtleistung eines Prüflings ist passend zur Konzeption der Aufgaben der Aufgabensammlung und des Abituraufgabenpools ein Bewertungsraster[2] vorgesehen, das angibt, wie die in den Prüfungsteilen A und B insgesamt erreichten Bewertungseinheiten in Notenpunkte umgesetzt werden.

[2] Das Bewertungsraster ist Teil des Dokuments „Beschreibung der Struktur“, das auf den Internetseiten des IQB zum Download bereitsteht.