Institut zur Qualitätsentwicklung im Bildungswesen

KULTUSMINISTER KONFERENZ

Gemeinsame Abituraufgabenpools der Länder

Pool für das Jahr 2022

Aufgaben für das Fach Mathematik

Kurzbeschreibung

Anforderungsniveau	Prüfungsteil	Sachgebiet[1]	digitales Hilfsmittel
erhöht	B	Analysis	WTR

1 Aufgabe

BE

Für einen industriellen Produktionsprozess wird ein Behälter verwendet. Im Laufe des Produktionsprozesses enthält der Behälter unterschiedliche Mengen einer Flüssigkeit. Die Füllhöhe der Flüssigkeit im Behälter in Zentimetern wird mit h bezeichnet.

1 Die Funktion M mit $M(h) = 100 \cdot e^{-0{,}04 \cdot h}$ beschreibt die Abhängigkeit einer Messgröße von h. Die Abbildung 1 zeigt den Graphen von M.

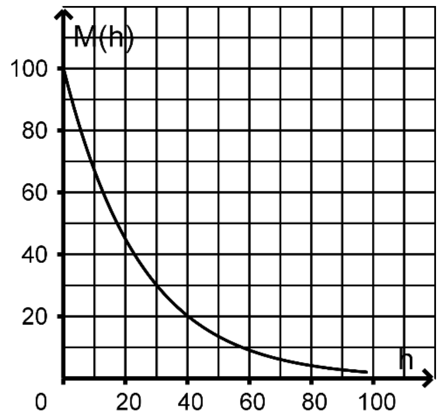

Abb. 1

a Geben Sie den Wert von M bei leerem Behälter an. Für die größte zugelassene Füllhöhe hat M den Wert 2. Berechnen Sie die größte zugelassene Füllhöhe. 4

b Nimmt die Füllhöhe um 25 cm ab, so verändert sich der Wert von M vom jeweiligen Ausgangswert zum k-fachen dieses Ausgangswerts. Weisen Sie rechnerisch nach, dass der Faktor k unabhängig von der Ausgangsfüllhöhe ist, und geben Sie den Wert von k an. 4

[1] verwendete Abkürzungen: AG/LA - Analytische Geometrie/Lineare Algebra, AG/LA (A1) - Analytische Geometrie/Lineare Algebra (Alternative A1), AG/LA (A2) - Analytische Geometrie/Lineare Algebra (Alternative A2)

c Zeigen Sie, dass der Graph der Zuordnung $h \mapsto \ln\left(100 \cdot e^{-0{,}04 \cdot h}\right)$ geradlinig verläuft. Geben Sie für diesen Graphen die Steigung sowie die Koordinaten des Punkts an, den er mit der y-Achse gemeinsam hat. 5

2 Der betrachtete Behälter ist kugelförmig und hat einen Innendurchmesser von 100 cm. Das Füllvolumen der Flüssigkeit im Behälter in Litern kann in Abhängigkeit von der Füllhöhe h mit dem Term $V(h) = \frac{1}{1000} \cdot \int_0^h \pi \cdot \left(50^2 - (50-x)^2\right) dx$ berechnet werden.

a Bestimmen Sie einen Term einer Stammfunktion der Funktion i mit $i(x) = \pi \cdot \left(50^2 - (50-x)^2\right)$. 4

b Die Abbildung 2 zeigt einen vertikalen Schnitt durch den Mittelpunkt des Behälters. Geben Sie die Bedeutung des Terms $\pi \cdot \left(50^2 - (50-x)^2\right)$ im Sachzusammenhang an und begründen Sie Ihre Angabe mithilfe der Abbildung 2. Beschreiben Sie die Bedeutung des Faktors $\frac{1}{1000}$ im Term $V(h)$ im Sachzusammenhang. 6

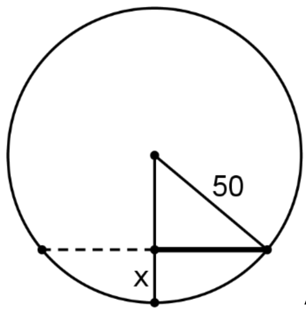

Abb. 2

c Die Abbildung 3 zeigt den Graphen der Funktion $h \mapsto V(h)$. Begründen Sie, dass der Wendepunkt dieses Graphen die x-Koordinate 50 hat, und berechnen Sie das zugehörige Füllvolumen. 5

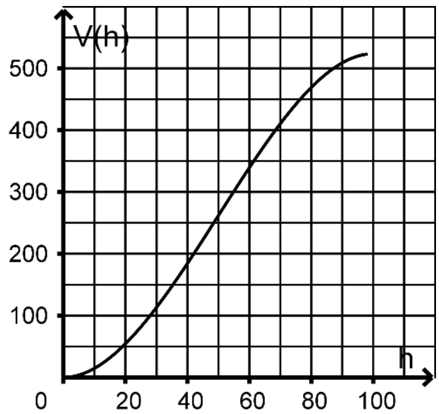

Abb. 3

3 Während des Produktionsprozesses wird dem Behälter kontinuierlich Flüssigkeit zugeführt und wieder entnommen. Die zeitliche Entwicklung des Füllvolumens der Flüssigkeit im Behälter lässt sich mithilfe des Terms $V(t) = 150 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{12} \cdot t\right) + 300$ beschreiben. Dabei ist t die seit Beginn des Produktionsprozesses vergangene Zeit in Minuten und $V(t)$ das Füllvolumen in Litern.

a Begründen Sie, dass das minimale Füllvolumen während des Produktionsprozesses 150 Liter beträgt. 2

b Berechnen Sie diejenigen Zeitpunkte in der ersten halben Stunde nach Beginn des Produktionsprozesses, zu denen das Füllvolumen jeweils genau 375 Liter beträgt. 6

c Bestimmen Sie unter Verwendung der Abbildung 3 die Füllhöhe, die 50 Minuten nach Beginn des Produktionsprozesses vorliegt. 4

40

2 Erwartungshorizont

Der Erwartungshorizont stellt für jede Teilaufgabe eine mögliche Lösung dar. Nicht dargestellte korrekte Lösungen sind als gleichwertig zu akzeptieren.

			BE
1	a	Bei leerem Behälter hat M den Wert 100. $M(h)=2 \Leftrightarrow e^{-0{,}04\cdot h}=0{,}02 \Leftrightarrow h=-25\cdot\ln(0{,}02)$, d. h. die größte zugelassene Füllhöhe beträgt etwa 98 cm.	4
	b	$M(h-25)=100\cdot e^{-0{,}04\cdot(h-25)}=100\cdot e^{-0{,}04\cdot h+1}=e\cdot M(h)$, d. h. $k=e$.	4
	c	$\ln\left(100\cdot e^{-0{,}04\cdot h}\right)=\ln 100-0{,}04\cdot h$ Steigung: $-0{,}04$ Gemeinsamer Punkt: $(0\,\|\,\ln 100)$	5
2	a	$\pi\cdot\left(50^2-(50-x)^2\right)=100\pi x-\pi x^2$ Term einer Stammfunktion: $50\pi x^2-\frac{1}{3}\pi x^3$	4
	b	Der angegebene Term gibt den Flächeninhalt des horizontalen Schnitts in der Höhe x durch den Behälter an. Begründung: Die Länge der Strecke, die in der Abbildung 2 fett dargestellt ist, beträgt gemäß dem Satz des Pythagoras $\sqrt{50^2-(50-x)^2}$. Diese Länge ist der Radius der Oberfläche der Flüssigkeit. Der Faktor $\frac{1}{1000}$ wandelt eine Angabe in Kubikzentimetern in eine Angabe in Litern um.	6
	c	Der Term $\frac{1}{1000}\cdot(100\pi-2\pi h)$ der zweiten Ableitungsfunktion der Funktion $h\mapsto V(h)$ hat genau dann den Wert 0, wenn $h=50$. $V(50)=\frac{1}{1000}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}\pi\cdot 50^3=\frac{250}{3}\pi$	5
3	a	Der minimale Wert von $\sin\left(\frac{\pi}{12}\cdot t\right)$ ist -1, der minimale Wert von $V(t)$ also $-150+300=150$.	2
	b	$150\cdot\sin\left(\frac{\pi}{12}\cdot t\right)+300=375 \Leftrightarrow \sin\left(\frac{\pi}{12}\cdot t\right)=\frac{1}{2}$ $\frac{\pi}{12}\cdot t=\frac{\pi}{6} \Leftrightarrow t=2$ $\frac{\pi}{12}\cdot t=\pi-\frac{\pi}{6} \Leftrightarrow t=10$ $\frac{\pi}{12}\cdot t=2\pi+\frac{\pi}{6} \Leftrightarrow t=26$ $\frac{\pi}{12}\cdot t=3\pi-\frac{\pi}{6} \Leftrightarrow t=34$ Die gesuchten Zeitpunkte liegen 2 Minuten, 10 Minuten und 26 Minuten nach Beginn des Produktionsprozesses.	6
	c	Für $t=50$ liefert $V(t)$ den Wert 375. Mithilfe der Abbildung 3 ergibt sich dafür eine Füllhöhe von etwa 65 cm.	4
			40

3 Standardbezug

Teilaufgabe	BE	allgemeine mathematische Kompetenzen						Anforderungsbereich		
		K1	K2	K3	K4	K5	K6	I	II	III
1 a	4		I	I		I		X		
b	4		II	I		II	II		X	
c	5	I				II			X	
2 a	4		I			I		X		
b	6	II		II	III		II			X
c	5	II	II	II		II			X	
3 a	2	I			I		I	X		
b	6	III	III	II		II				X
c	4		II	I	I	I			X	

Anzahl[2] der Bewertungseinheiten im		
Anforderungsbereich I	Anforderungsbereich II	Anforderungsbereich III
10	18	12

4 Bewertungshinweise

Die Bewertung der erbrachten Prüfungsleistungen hat sich für jede Teilaufgabe nach der am rechten Rand der Aufgabenstellung angegebenen Anzahl maximal erreichbarer Bewertungseinheiten (BE) zu richten.

Für die Bewertung der Gesamtleistung eines Prüflings ist passend zur Konzeption der Aufgaben der Aufgabensammlung und des Abituraufgabenpools ein Bewertungsraster[3] vorgesehen, das angibt, wie die in den Prüfungsteilen A und B insgesamt erreichten Bewertungseinheiten in Notenpunkte umgesetzt werden.

[2] Die Ermittlung der Anzahlen erfolgt ausschließlich auf der Grundlage der Spalten „BE“ und „Anforderungsbereich“ in der vorhergehenden Tabelle.

Bei jeder Aufgabe zum Prüfungsteil B liegen die Anzahlen der Bewertungseinheiten – abhängig vom Anforderungsniveau – in den Bereichen, die der folgenden Tabelle zu entnehmen sind:

Anforderungsniveau	erhöht			grundlegend		
Anforderungsbereich	I	II	III	I	II	III
Anzahl der BE	8 - 10	17 - 21	11 - 13	10 - 12	14 - 18	7 - 9

[3] Das Bewertungsraster ist Teil des Dokuments „Beschreibung der Struktur“, das auf den Internetseiten des IQB zum Download bereitsteht.