

Gemeinsame Abituraufgabenpools der Länder

Pool für das Jahr 2022

Aufgaben für das Fach Mathematik

Kurzbeschreibung

Anforderungsniveau	Prüfungsteil	Sachgebiet ¹	digitales Hilfsmittel
erhöht	B	AG/LA (A1)	WTR

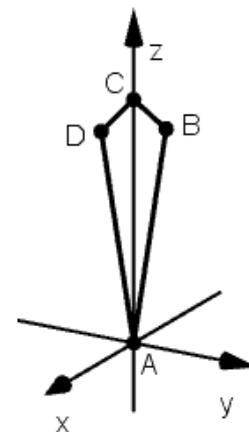
1 Aufgabe

1 Das abgebildete Drachenviereck hat die Eckpunkte $A(0|0|0)$, $B(-3|4|35)$, $C(0|0|40)$ und $D(3|-4|35)$.

a Zeigen Sie, dass die Seiten \overline{BC} und \overline{CD} einen rechten Winkel einschließen.

b Bestimmen Sie die Koordinaten desjenigen Punkts E auf der längeren Diagonale des Drachenvierecks, für den das Viereck BCDE ein Quadrat ist.

c Gegeben sind zusätzlich die Punkte $S_k(8|6|k)$ mit $k \in \mathbb{R}$. Für jeden Wert von k ist das Dreieck BDS_k gleichschenkelig mit der Basis \overline{BD} . Bestimmen Sie denjenigen Wert von k, für den BCS_k ein gleichschenkliges Dreieck mit der Basis \overline{BC} ist. Begründen Sie ohne zu rechnen, dass für diesen Wert von k auch das Dreieck CDS_k gleichschenklig ist.



BE

2

2

5

2 Eine Werbefläche wird mit 4500 Lampen beleuchtet. Jede der Lampen kann in jeder der Farben Rot, Grün und Blau leuchten. Der Zustand der Lampen zum Zeitpunkt n

wird durch den Vektor $\vec{v}_n = \begin{pmatrix} r_n \\ g_n \\ b_n \end{pmatrix}$ dargestellt; dabei ist r_n die Anzahl der rot leuchtenden,

g_n die Anzahl der grün leuchtenden und b_n die Anzahl der blau leuchtenden

¹ verwendete Abkürzungen: AG/LA - Analytische Geometrie/Lineare Algebra, AG/LA (A1) - Analytische Geometrie/Lineare Algebra (Alternative A1), AG/LA (A2) - Analytische Geometrie/Lineare Algebra (Alternative A2)

Lampen. Der Wechsel der Farben von einem Zeitpunkt zum nächsten wird zunächst

durch die Gleichung $\vec{v}_{n+1} = N \cdot \vec{v}_n$ mit $N = \begin{pmatrix} 0,4 & 0,2 & 0,2 \\ 0,3 & 0,2 & 0,5 \\ 0,3 & 0,6 & 0,3 \end{pmatrix}$ beschrieben.

a Stellen Sie den Wechsel der Farben in einem Übergangdiagramm dar. 3

b Zu einem Zeitpunkt leuchten 1000 Lampen blau. Nach dem anschließenden Farbwechsel stimmen die drei Anzahlen der rot, grün und blau leuchtenden Lampen überein. Bestimmen Sie das Verhältnis der Anzahl der rot leuchtenden zur Anzahl der grün leuchtenden Lampen vor dem Farbwechsel. 5

Im Folgenden werden Matrizen der Form $F_a = \begin{pmatrix} a & a & 0 \\ a & a & 0 \\ 1-2a & 1-2a & 1 \end{pmatrix}$ mit $a \in \mathbb{R}_0^+$ be-

trachtet. Für $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ gilt $F_a^k = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \cdot 2^k a^k & \frac{1}{2} \cdot 2^k a^k & 0 \\ \frac{1}{2} \cdot 2^k a^k & \frac{1}{2} \cdot 2^k a^k & 0 \\ 1-2^k a^k & 1-2^k a^k & 1 \end{pmatrix}$.

c Untersuchen Sie, für welche Werte von a sich jeder Eintrag von F_a^k für $k \rightarrow +\infty$ einem endlichen Wert nähert. 3

d Für $a < \frac{1}{2}$ und $k \rightarrow +\infty$ gilt $F_a^k \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Für $a \leq \frac{1}{2}$ stellt die Matrix F_a im Mo- 5

dell Farbwechsel der Lampen dar. Beschreiben Sie in Abhängigkeit von a , wie diese Farbwechsel ablaufen.

25

2 Erwartungshorizont

Der Erwartungshorizont stellt für jede Teilaufgabe eine mögliche Lösung dar. Nicht dargestellte korrekte Lösungen sind als gleichwertig zu akzeptieren.

		BE
1	<p>a</p> $\vec{CB} \circ \vec{CD} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ -5 \end{pmatrix} = -9 - 16 + 25 = 0$	2
	<p>b</p> $\vec{OE} = \vec{OD} + \vec{CB} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 35 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 30 \end{pmatrix}$	2

c	$ \overline{BS}_k = \overline{CS}_k \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 11 \\ 2 \\ k-35 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \\ k-40 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \sqrt{125 + (k-35)^2} = \sqrt{100 + (k-40)^2}$ $\Leftrightarrow 125 + k^2 - 70k + 1225 = 100 + k^2 - 80k + 1600 \Leftrightarrow 10k = 350 \Leftrightarrow k = 35$ <p>Aufgrund der Gleichschenkligkeit der Dreiecke BCS_k und BDS_k gilt $\overline{BS}_k = \overline{CS}_k$ und $\overline{BS}_k = \overline{DS}_k$, also auch $\overline{CS}_k = \overline{DS}_k$.</p>	5
2 a		3
b	$\begin{pmatrix} 0,4 & 0,2 & 0,2 \\ 0,3 & 0,2 & 0,5 \\ 0,3 & 0,6 & 0,3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} r \\ g \\ 1000 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1500 \\ 1500 \\ 1500 \end{pmatrix} \text{ liefert:}$ $\text{I } 0,4r + 0,2g + 200 = 1500 \qquad \text{II } 0,3r + 0,2g + 500 = 1500$ <p>Aus I und II ergibt sich $0,1r = 300 \Leftrightarrow r = 3000$ und damit $g = 500$, d. h. $r : g = 6 : 1$.</p>	5
c	<p>Für $k \rightarrow +\infty$ gilt $(2a)^k \rightarrow +\infty$ für $a > \frac{1}{2}$, $(2a)^k \rightarrow 1$ für $a = \frac{1}{2}$ und $(2a)^k \rightarrow 0$ für $a < \frac{1}{2}$. Damit nähert sich nur für $a \leq \frac{1}{2}$ jeder Eintrag von F_a^k für $k \rightarrow +\infty$ einem endlichen Wert.</p>	3
d	<p>$a = 0$: Unabhängig vom Ausgangszustand leuchten nach dem ersten Farbwechsel alle Lampen blau.</p> <p>$0 < a < \frac{1}{2}$: Die Lampen, die zu Beginn oder nach einem Wechsel blau leuchten, behalten diese Farbe bei. Von den Lampen, die zu Beginn oder nach einem Wechsel rot oder grün leuchten, behält mit jedem Wechsel ein bestimmter Anteil die Farbe bei, der gleiche Anteil wechselt zur jeweils anderen Farbe und die übrigen zur Farbe Blau, und zwar so lange, bis schließlich alle Lampen blau leuchten.</p> <p>$a = \frac{1}{2}$: Die Lampen, die zu Beginn blau leuchten, behalten diese Farbe bei. Von den Lampen, die zu Beginn rot leuchten, ändert mit jedem Wechsel die Hälfte die Farbe zu Grün, und umgekehrt.</p>	5
		25

3 Standardbezug

Teilaufgabe	BE	allgemeine mathematische Kompetenzen						Anforderungsbereich		
		K1	K2	K3	K4	K5	K6	I	II	III
1 a	2					I		X		
b	2	II	II			I			X	
c	5	II	II			II			X	

2 a	3			I	I		I	X		
b	5		II	II		II	II		X	
c	3	II	III		II	II				X
d	5	III		III	II		II			X

4 Bewertungshinweise

Die Bewertung der erbrachten Prüfungsleistungen hat sich für jede Teilaufgabe nach der am rechten Rand der Aufgabenstellung angegebenen Anzahl maximal erreichbarer Bewertungseinheiten (BE) zu richten.

Für die Bewertung der Gesamtleistung eines Prüflings ist passend zur Konzeption der Aufgaben der Aufgabensammlung und des Abituraufgabenpools ein Bewertungsraster² vorgesehen, das angibt, wie die in den Prüfungsteilen A und B insgesamt erreichten Bewertungseinheiten in Notenpunkte umgesetzt werden.

² Das Bewertungsraster ist Teil des Dokuments „Beschreibung der Struktur“, das auf den Internetseiten des IQB zum Download bereitsteht.