Gemeinsame Abituraufgabenpools der Länder

Pool für das Jahr 2021

Aufgaben für das Fach Mathematik

Kurzbeschreibung

Anforderungsniveau	Prüfungsteil	Sachgebiet[1]	digitales Hilfsmittel
grundlegend	B	Analysis	CAS

1 Aufgabe

	BE
Gegeben ist die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion f mit $f(x)=\left(2+\frac{x}{2}\right)\cdot\left(1-\frac{x}{2}\right)^3$. Der Graph von f wird mit G_f bezeichnet.	
1 a Geben Sie die Koordinaten der Schnittpunkte von G_f mit den Koordinatenachsen an.	2
b Begründen Sie ohne weitere Rechnung, dass G_f mindestens einen Hochpunkt hat.	3
c $W_1(2\,|\,0)$ ist ein Wendepunkt von G_f. Weisen Sie rechnerisch nach, dass auch $W_2\left(-1\,\middle|\,\frac{81}{16}\right)$ ein Wendepunkt von G_f ist und dass G_f keine weiteren Wendepunkte hat.	3
Die Gerade g verläuft durch W_1 und W_2.	
d Stellen Sie G_f für $-4 \le x \le 4$ in einem Koordinatensystem dar. Zeichnen Sie g in dieses Koordinatensystem ein und weisen Sie nach, dass g durch die Gleichung $y=-\frac{27}{16}x+\frac{27}{8}$ dargestellt wird.	4
e G_f und g schließen drei Flächenstücke ein. Zeigen Sie, dass die Summe der Inhalte zweier dieser Flächenstücke ebenso groß ist wie der Inhalt des dritten.	4
f Ermitteln Sie rechnerisch die Anzahl der Geraden, die parallel zu g sind und G_f berühren.	3

[1] verwendete Abkürzungen: AG/LA - Analytische Geometrie/Lineare Algebra, AG/LA (A1) - Analytische Geometrie/Lineare Algebra (Alternative A1), AG/LA (A2) - Analytische Geometrie/Lineare Algebra (Alternative A2)

2 Im Längsschnitt eines Berghangs kann dessen Profillinie für $-5 \le x \le 4$ modellhaft durch den Graphen der in IR definierten Funktion h mit $h(x) = \frac{1}{4} \cdot f\left(\frac{1}{2} \cdot x\right)$, d. h. $h(x) = \frac{1}{1024} \cdot (8+x) \cdot (4-x)^3$, beschrieben werden. Es soll davon ausgegangen werden, dass der Hang in Querrichtung nicht geneigt ist. Im verwendeten Koordinatensystem beschreibt die x-Achse die Horizontale; eine Längeneinheit entspricht 100 Metern in der Wirklichkeit.

a Der Hochpunkt des Graphen von h hat die x-Koordinate -5. Geben Sie die zugehörige y-Koordinate an und stellen Sie die Profillinie des Hangs in einem Koordinatensystem graphisch dar. 2

b Beschreiben Sie, wie der Graph von h aus dem Graphen von f erzeugt werden kann. 2

c Zeigen Sie rechnerisch, dass der Höhenunterschied zwischen dem höchsten und tiefsten Punkt des Hangs etwa 214 m beträgt. Ermitteln Sie das durchschnittliche Gefälle zwischen diesen beiden Punkten in Prozent. 4

d Der Hang wird als Skipiste genutzt. Der Tabelle kann der Zusammenhang zwischen dem Schwierigkeitsgrad von Skipisten und deren jeweiligem maximalen Gefälle entnommen werden: 3

Schwierigkeitsgrad	leicht	mittel	schwer
maximales Gefälle	bis 25 %	bis 40 %	mehr als 40 %

Ermitteln Sie den Schwierigkeitsgrad der hier betrachteten Piste.

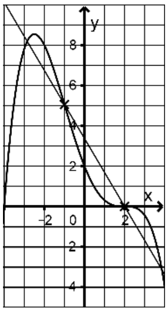
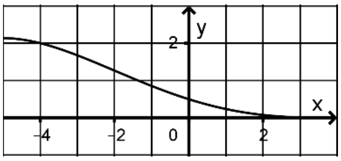
e Am höchsten Punkt des Hangs steht ein Turm mit einer Höhe von 25 m. Es gibt zwei Abschnitte des Hangs, in denen der Turm vom Boden aus zumindest teilweise sichtbar ist. Ermitteln Sie die Lage des höher gelegenen der beiden Abschnitte. 5

35

2 Erwartungshorizont

Der Erwartungshorizont stellt für jede Teilaufgabe eine mögliche Lösung dar. Nicht dargestellte korrekte Lösungen sind als gleichwertig zu akzeptieren.

			BE
1	**a**	Schnittpunkte mit der x-Achse: $(-4\,|\,0)$, $(2\,|\,0)$ Schnittpunkt mit der y-Achse: $(0\,|\,2)$	2
	b	f ist eine in IR definierte ganzrationale Funktion und es gilt $f(-4) = 0$, $f(0) > 0$ und $f(2) = 0$. Damit hat G_f für $-4 \le x \le 2$ mindestens einen Hochpunkt.	3
	c	$f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1 \vee x = 2$, $f'''(-1) \ne 0$, $f(-1) = \frac{81}{16}$	3

	d	 $-\frac{27}{16}\cdot 2+\frac{27}{8}=0$ $-\frac{27}{16}\cdot(-1)+\frac{27}{8}=\frac{81}{16}$	4
	e	Für $x\neq -1$ und $x\neq 2$ gilt $f(x)=-\frac{27}{16}x+\frac{27}{8} \Leftrightarrow x=\frac{1}{2}-\frac{3}{2}\sqrt{5} \vee x=\frac{1}{2}+\frac{3}{2}\sqrt{5}$ mit $\frac{1}{2}-\frac{3}{2}\sqrt{5}<-1$ und $\frac{1}{2}+\frac{3}{2}\sqrt{5}>2$. $\int_{\frac{1}{2}-\frac{3}{2}\sqrt{5}}^{\frac{1}{2}+\frac{3}{2}\sqrt{5}}\left(f(x)-\left(-\frac{27}{16}x+\frac{27}{8}\right)\right)dx=0$	4
	f	$f'(x)=-\frac{27}{16} \Leftrightarrow x=\frac{1}{2}-\frac{3}{2}\sqrt{3} \vee x=\frac{1}{2} \vee x=\frac{1}{2}+\frac{3}{2}\sqrt{3}$ Die Tangente im Punkt $\left(\frac{1}{2}-\frac{3}{2}\sqrt{3} \mid f\left(\frac{1}{2}-\frac{3}{2}\sqrt{3}\right)\right)$ wird durch die Gleichung $y=-\frac{27}{16}x+\frac{297}{64}$ dargestellt. Sie berührt G_f auch im Punkt $\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{2}\sqrt{3} \mid f\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{2}\sqrt{3}\right)\right)$, nicht aber im Punkt $\left(\frac{1}{2} \mid f\left(\frac{1}{2}\right)\right)$. Damit gibt es genau zwei solche Geraden.	3
2	a	 $y=\frac{2187}{1024}$	2
	b	Der Graph von h kann aus G_f durch eine Streckung mit dem Faktor $\frac{1}{4}$ in y-Richtung und eine Streckung mit dem Faktor 2 in x-Richtung erzeugt werden.	2
	c	Für $-5\leq x\leq 4$ nimmt h sein Minimum bei $x=4$ an. Es gilt $(h(-5)-h(4))\cdot 100\approx 214$. $\frac{h(-5)-h(4)}{9}\approx 24\,\%$	4
	d	Für $-5\leq x\leq 4$ hat h' das Minimum $h'(-2)\approx 0{,}42$, es handelt sich also um eine schwere Piste.	3
	e	Mit $i(x)=m\cdot(x+5)+h(-5)+0{,}25$ liefern $i(x)=h(x)$ und $i'(x)=h'(x)$ als kleinste Lösung für x, die größer als -5 ist, $x_1\approx -3{,}3$. Damit ergibt sich für den gesuchten Abschnitt $-5\leq x\leq x_1$.	5
			35

3 Standardbezug

Teilaufgabe	BE	allgemeine mathematische Kompetenzen						Anforderungsbereich		
		K1	K2	K3	K4	K5	K6	I	II	III
1 a	2				I			X		
b	3	II					II		X	
c	3	I				I		X		
d	4				I	I		X		
e	4	II	II			II			X	
f	3	II	III		II	I				X
2 a	2				I	I		X		
b	2	II			II		I		X	
c	4		I	II		I			X	
d	3			II	I	II			X	
e	5	II	III	III		II	II			X

4 Bewertungshinweise

Die Bewertung der erbrachten Prüfungsleistungen hat sich für jede Teilaufgabe nach der am rechten Rand der Aufgabenstellung angegebenen Anzahl maximal erreichbarer Bewertungseinheiten (BE) zu richten.

Für die Bewertung der Gesamtleistung eines Prüflings ist ein Bewertungsraster[2] vorgesehen, das angibt, wie die in den Prüfungsteilen A und B insgesamt erreichten Bewertungseinheiten in Notenpunkte umgesetzt werden.

[2] Das Bewertungsraster ist Teil des Dokuments „Beschreibung der Struktur", das auf den Internetseiten des IQB zum Download bereitsteht.