Gemeinsame Abituraufgabenpools der Länder

Pool für das Jahr 2021

Aufgaben für das Fach Mathematik

Kurzbeschreibung

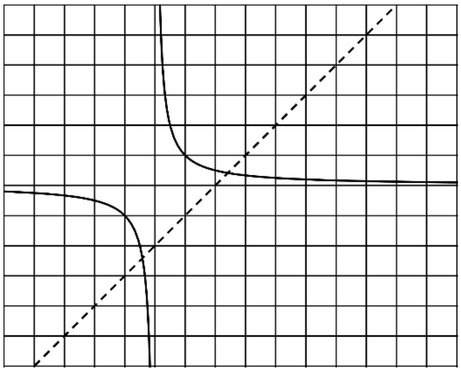
Anforderungsniveau	Prüfungsteil	Sachgebiet[1]	digitales Hilfsmittel
erhöht	B	Analysis	WTR

1 Aufgabe

	BE
Gegeben ist die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion $f: x \mapsto e^x$.	
a Bestimmen Sie rechnerisch eine Gleichung der Tangente an den Graphen von f in dessen Schnittpunkt mit der y-Achse. Geben Sie eine Gleichung der Gerade an, die in diesem Punkt senkrecht zur Tangente steht, sowie den Inhalt der Fläche, die von dieser Gerade, der Tangente und der x-Achse eingeschlossen wird.	4
b Geben Sie alle Werte von $m \in \mathbb{R}$ an, für die die Gerade mit der Gleichung $y = m \cdot x + 1$ mit dem Graphen von f genau einen Punkt gemeinsam hat.	3
c Der Graph von f, die Koordinatenachsen und die Gerade mit der Gleichung $x = a$ mit $a > 0$ begrenzen ein Flächenstück. Rotiert dieses Flächenstück um die x-Achse, so erzeugt es einen Körper mit dem Volumen 3π. Bestimmen Sie den Wert von a.	5
Gegeben sind außerdem die in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ definierte Funktion $g: x \mapsto \frac{1}{x}$ sowie die Funktion $h: x \mapsto \frac{1}{x-2} + 4$, deren Definitionsmenge so groß wie möglich gewählt wurde.	
d Beschreiben Sie, wie der Graph von h aus dem Graphen von g erzeugt werden kann. Geben Sie die Definitionsmenge von h sowie den Grenzwert von h für $x \to +\infty$ an.	4

[1] verwendete Abkürzungen: AG/LA - Analytische Geometrie/Lineare Algebra, AG/LA (A1) - Analytische Geometrie/Lineare Algebra (Alternative A1), AG/LA (A2) - Analytische Geometrie/Lineare Algebra (Alternative A2)

e Die Abbildung soll den Graphen von h sowie die Gerade w mit der Gleichung $y = x$ darstellen. Ergänzen Sie die fehlenden Koordinatenachsen und skalieren Sie diese passend. 3



f Für jede Stammfunktion H von h gilt für jede reelle Zahl $b > 5$: $H(b) - H(5) > 4 \cdot (b - 5)$. Beschreiben Sie die geometrische Bedeutung dieser Aussage und veranschaulichen Sie die Aussage grafisch. 4

Die Umkehrfunktion von h wird mit k bezeichnet.

g Alle gemeinsamen Punkte der Graphen von h und k liegen auf der Gerade w. Berechnen Sie die x-Koordinaten dieser gemeinsamen Punkte. 5

h Begründen Sie ohne zu rechnen, dass jede Tangente mit der Steigung -1 an den Graphen von h auch Tangente an den Graphen von k ist. 3

Betrachtet werden nun die in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ definierte Funktion $u : x \mapsto f(g(x))$ sowie die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion $v : x \mapsto g(f(x))$. Für die erste Ableitungsfunktion u' von u gilt $u'(x) = -\frac{1}{x^2} \cdot e^{\frac{1}{x}}$.

i Geben Sie für jede der Funktionen u und v einen Funktionsterm an, der zwar die Variable x, aber keine Funktionsbezeichnung wie „f“ oder „g“ enthält. Nennen Sie die Wertemengen von u und v. 4

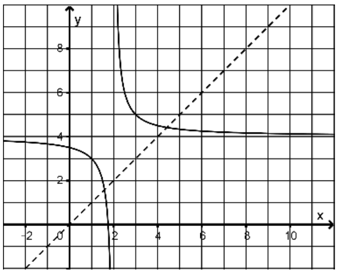
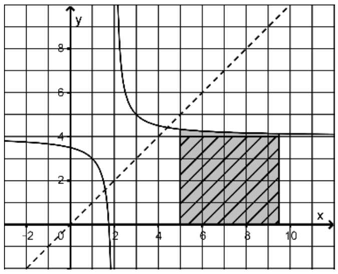
j Zeigen Sie, dass u genau eine Wendestelle hat, und bestimmen Sie diese Wendestelle. 5

40

2 Erwartungshorizont

Der Erwartungshorizont stellt für jede Teilaufgabe eine mögliche Lösung dar. Nicht dargestellte korrekte Lösungen sind als gleichwertig zu akzeptieren.

		BE
a	$f'(x) = e^x$, $f'(0) = 1$, $f(0) = 1$ Gleichung der Tangente: $y = x + 1$ Gleichung der Gerade: $y = -x + 1$ Flächeninhalt: 1	4
b	$m < 0$, $m = 0$ und $m = 1$	3

c	$\pi \cdot \int_0^a f(x)^2\,dx = \pi \cdot \int_0^a e^{2x}dx = \pi \cdot \left[\frac{1}{2}e^{2x}\right]_0^a = \pi \cdot \left(\frac{1}{2}e^{2a} - \frac{1}{2}\right) = 3\pi \Leftrightarrow e^{2a} = 7 \Leftrightarrow a = \frac{1}{2} \cdot \ln 7$	5
d	Der Graph von h kann aus dem Graphen von g durch eine Verschiebung um 2 in positive x-Richtung und eine Verschiebung um 4 in positive y-Richtung erzeugt werden. Definitionsmenge: $\mathrm{IR} \setminus \{2\}$ $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = 4$	4
e	 	3
f	Der Inhalt der Fläche, die der Graph von h mit der x-Achse und den Geraden mit den Gleichungen $x = 5$ und $x = b$ einschließt, ist größer als der Flächeninhalt eines Rechtecks mit den Seitenlängen 4 und $b - 5$.  	4
g	$h(x) = x \Leftrightarrow \frac{1}{x-2} = x - 4 \Leftrightarrow 1 = x^2 - 6x + 8 \Leftrightarrow x^2 - 6x + 7 = 0 \Leftrightarrow x = 3 - \sqrt{2} \vee x = 3 + \sqrt{2}$	5
h	Die Graphen von h und k liegen bezüglich w zueinander symmetrisch. Da jede Gerade mit der Steigung -1 symmetrisch bezüglich w ist, berührt sie, wenn sie den Graphen von h berührt, auch den Graphen von k.	3
i	$u(x) = e^{\frac{1}{x}}$, Wertemenge: $\mathrm{IR}^+ \setminus \{1\}$ $v(x) = \frac{1}{e^x}$, Wertemenge: IR^+	4
j	$u'(x) = -\frac{1}{x^2} \cdot e^{\frac{1}{x}}$ $u''(x) = \frac{2}{x^3} \cdot e^{\frac{1}{x}} - \frac{1}{x^2} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) \cdot e^{\frac{1}{x}} = \left(\frac{2}{x^3} + \frac{1}{x^4}\right) \cdot e^{\frac{1}{x}} = \frac{1}{x^4} \cdot (2x+1) \cdot e^{\frac{1}{x}} = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$ Wegen $u''(x) < 0$ für $x < -\frac{1}{2}$ und $u''(x) > 0$ für $x > -\frac{1}{2}$ hat u bei $x = -\frac{1}{2}$ eine Wendestelle.	5
		40

3 Standardbezug

Teilaufgabe	BE	allgemeine mathematische Kompetenzen						Anforderungsbereich		
		K1	K2	K3	K4	K5	K6	I	II	III
a	4	I				I		X		
b	3	II	II		I				X	

c	5		I			II	I		X	
d	4	I			I		I	X		
e	3	II	I		II		I		X	
f	4	III			III		II			X
g	5					II			X	
h	3	III					II			X
i	4	II			II	I			X	
j	5	I	I			III				X

4 Bewertungshinweise

Die Bewertung der erbrachten Prüfungsleistungen hat sich für jede Teilaufgabe nach der am rechten Rand der Aufgabenstellung angegebenen Anzahl maximal erreichbarer Bewertungseinheiten (BE) zu richten.

Für die Bewertung der Gesamtleistung eines Prüflings ist ein Bewertungsraster[2] vorgesehen, das angibt, wie die in den Prüfungsteilen A und B insgesamt erreichten Bewertungseinheiten in Notenpunkte umgesetzt werden.

[2] Das Bewertungsraster ist Teil des Dokuments „Beschreibung der Struktur“, das auf den Internetseiten des IQB zum Download bereitsteht.