Institut zur Qualitätsentwicklung im Bildungswesen

KULTUSMINISTER KONFERENZ

Gemeinsame Abituraufgabenpools der Länder

Pool für das Jahr 2021

Aufgaben für das Fach Mathematik

Kurzbeschreibung

Anforderungsniveau	Prüfungsteil	Sachgebiet[1]	digitales Hilfsmittel
erhöht	B	Analysis	WTR

1 Aufgabe

BE

Die Abbildung 1 zeigt modellhaft den Längsschnitt einer dreiteiligen Brücke aus Holz für eine Spielzeugeisenbahn. Die Züge können sowohl über die Brücke fahren als auch darunter hindurch.

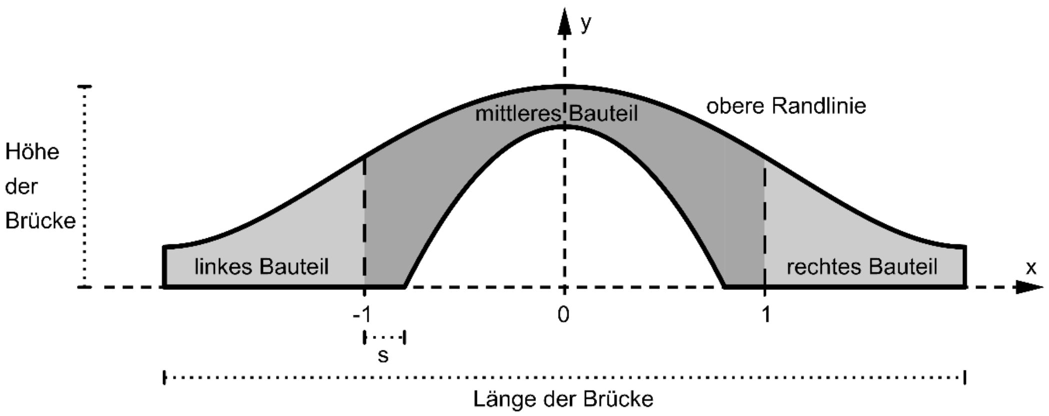

Abb. 1

Die obere Randlinie des Längsschnitts der Brücke kann mithilfe des Graphen der in IR definierten Funktion $f: x \mapsto \frac{1}{20}x^4 - \frac{2}{5}x^2 + 1$ beschrieben werden. Dabei werden die Endpunkte dieser Randlinie durch die beiden Tiefpunkte des Graphen von f dargestellt. Im verwendeten Koordinatensystem beschreibt die x-Achse die Horizontale; eine Längeneinheit entspricht einem Dezimeter in der Realität.

1 a Zeigen Sie rechnerisch, dass die obere Randlinie achsensymmetrisch ist. | 2

[1] verwendete Abkürzungen: AG/LA - Analytische Geometrie/Lineare Algebra, AG/LA (A1) - Analytische Geometrie/Lineare Algebra (Alternative A1), AG/LA (A2) - Analytische Geometrie/Lineare Algebra (Alternative A2)

b Bestimmen Sie rechnerisch die Höhe und die Länge der Brücke. 5

(zur Kontrolle: Ein Tiefpunkt des Graphen von f hat die x-Koordinate 2.)

c Betrachtet wird derjenige Punkt der oberen Randlinie, der sich am Übergang vom mittleren zum rechten Bauteil befindet. Prüfen Sie, ob dieser Punkt auf halber Höhe zwischen dem höchsten Punkt der oberen Randlinie und deren rechtem Endpunkt liegt. 3

d Geben Sie die Bedeutung des Terms $\frac{f(2)-f(1)}{2-1}$ im Sachzusammenhang an und berechnen Sie seinen Wert. 2

e Berechnen Sie die Größe des größten Steigungswinkels der Brücke, der beim Überfahren zu überwinden ist. 5

Der parabelförmige Teil der unteren Randlinie des Längsschnitts der Brücke kann mithilfe des Graphen einer in $\mathbb{R}$ definierten Funktion $q: x \mapsto 0{,}8 - a \cdot x^2$ mit $a \in \mathbb{R}^+$ beschrieben werden.

f In der Abbildung 1 ist die Länge einer der beiden Bodenflächen des mittleren Bauteils mit s bezeichnet. Bestimmen Sie alle Werte von a, die für diese Länge mindestens 0,1 dm liefern. 4

g Begründen Sie im Sachzusammenhang, dass für die Beschreibung der unteren Randlinie beliebig große Werte von a nicht infrage kommen. 2

h Für die Brücke gilt $a = 1{,}25$. Die drei Bauteile der Brücke werden aus massivem Holz hergestellt; $1\,\text{dm}^3$ des Holzes hat eine Masse von 800 Gramm. Die Brücke ist 0,4 dm breit. Ermitteln Sie die Masse des mittleren Bauteils. 7

2 Während der Planung der Brückenform kamen zur Beschreibung der oberen Randlinie für das linke Bauteil eine Funktion g_ℓ und für das rechte Bauteil eine Funktion g_r infrage. Auch bei Verwendung dieser Funktionen wäre die obere Randlinie achsensymmetrisch gewesen. Beurteilen Sie jede der folgenden Aussagen: 4

I $-g_\ell(x) = g_r(-x)$ für $-2 \le x \le -1$ **II** $g_\ell(x-1) = g_r(-x+1)$ für $-1 \le x \le 0$

3 Die Form und die Größe der Brücke werden verändert, indem im bisher verwendeten Modell die obere Randlinie des Längsschnitts mithilfe der in $\mathbb{R}$ definierten Funktion $k: x \mapsto \frac{3}{5} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{3}x\right) + \frac{4}{5}$ beschrieben wird. Die Bauteile der veränderten Brücke lassen sich nach dem in der Abbildung 2 dargestellten Prinzip aus einem quaderförmigen Holzblock sägen. Der beim Sägen auftretende Materialverlust soll im Folgenden vernachlässigt werden.

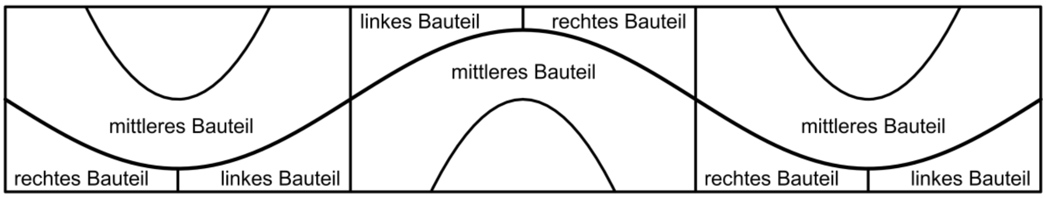

Abb. 2

a Der Graph von k ist symmetrisch bezüglich jedes seiner Wendepunkte. Beschreiben Sie, wie diese Eigenschaft mit dem in der Abbildung 2 dargestellten Prinzip zusammenhängt. 2

b Ermitteln Sie mithilfe des Funktionsterms von k den Flächeninhalt der gesamten in der Abbildung 2 gezeigten rechteckigen Vorderseite des Holzblocks.	4
	40

2 Erwartungshorizont

Der Erwartungshorizont stellt für jede Teilaufgabe eine mögliche Lösung dar. Nicht dargestellte korrekte Lösungen sind als gleichwertig zu akzeptieren.

			BE
1	**a**	$f(-x)=\frac{1}{20}\cdot(-x)^4-\frac{2}{5}\cdot(-x)^2+1=\frac{1}{20}x^4-\frac{2}{5}x^2+1=f(x)$	2
	b	$f(0)=1$, d. h. die Höhe beträgt 1 dm. $f'(x)=\frac{1}{5}x^3-\frac{4}{5}x$; $f'(x)=0 \Leftrightarrow \frac{1}{5}x\cdot\left(x^2-4\right)=0$ Daraus ergibt sich in Verbindung mit der Abbildung 1, dass die Tiefpunkte des Graphen von f die x-Koordinaten -2 und 2 haben. Die Brücke ist also 4 dm lang.	5
	c	$f(1)=\frac{13}{20}\neq\frac{3}{5}=\frac{1+0{,}2}{2}=\frac{f(0)+f(2)}{2}$, die beschriebene Bedingung ist also nicht erfüllt.	3
	d	Der Term gibt für das rechte Bauteil die mittlere Steigung der oberen Randlinie an. $\frac{f(2)-f(1)}{2-1}=\frac{1}{5}-\frac{13}{20}=-\frac{9}{20}$	2
	e	$f''(x)=\frac{3}{5}x^2-\frac{4}{5}=0 \Leftrightarrow x^2=\frac{4}{3} \Leftrightarrow x=\pm\frac{2}{3}\sqrt{3}$ $\tan\alpha=f'\left(-\frac{2}{3}\sqrt{3}\right)=\frac{16}{45}\sqrt{3}$ liefert $\alpha\approx 32°$.	5
	f	$q(-0{,}9)=0{,}8-a\cdot(-0{,}9)^2\leq 0 \Leftrightarrow a\geq\frac{80}{81}$	4
	g	Je größer der Wert von a ist, desto schmaler ist der Graph von q und damit die Durchfahrt der Brücke. Wird der Wert von a zu groß, kann kein Zug mehr hindurchfahren.	2
	h	$q(x)=0{,}8-1{,}25\cdot x^2=0 \Leftrightarrow x^2=\frac{0{,}8}{1{,}25} \Leftrightarrow x=\pm 0{,}8$ $2\cdot\left(\int_0^1 f(x)\,dx-\int_0^{0{,}8} q(x)\,dx\right)=2\cdot\left(\left[\frac{1}{100}x^5-\frac{2}{15}x^3+x\right]_0^1-\left[0{,}8x-\frac{5}{12}x^3\right]_0^{0{,}8}\right)$ $=2\cdot\left(\frac{1}{100}-\frac{2}{15}+1-\left(\frac{16}{25}-\frac{16}{75}\right)\right)=0{,}9$ Damit: $0{,}9\,\text{dm}^2\cdot 0{,}4\,\text{dm}\cdot\frac{800\,\text{g}}{1\text{dm}^3}=288\,\text{g}$	7
2		I: Diejenigen Teile der Graphen von g_ℓ und g_r, die im Längsschnitt die oberen Randlinien des linken bzw. rechten Bauteils darstellen, liegen nicht symmetrisch bezüglich des Koordinatenursprungs. Damit ist die Aussage falsch. II: Diejenigen Teile der Graphen von g_ℓ und g_r, die im Längsschnitt die oberen Randlinien des linken bzw. rechten Bauteils darstellen, liegen symmetrisch bezüglich der y-Achse. Also gilt $g_\ell(-1-x)=g_r(1+x)$ für $0\leq x\leq 1$ und damit	4

		$g_\ell(-1+x)=g_r(1-x)$ für $-1\le x\le 0$. Folglich ist die Aussage richtig.	
3	**a**	Aufgrund der Symmetrie bezüglich der Wendepunkte haben die drei linken, die drei mittleren und die drei rechten Bauteile im Hinblick auf die obere Randlinie jeweils die gleiche Form.	2
	b	k hat die Periode 6. Damit ergibt sich für den Flächeninhalt in Quadratdezimetern $1{,}5\cdot 6\cdot 2\cdot k(1{,}5)=14{,}4$.	4
			40

3 Standardbezug

Teilaufgabe	BE	allgemeine mathematische Kompetenzen						Anforderungsbereich		
		K1	K2	K3	K4	K5	K6	I	II	III
1 a	2	I		I		I		X		
b	5		I	I	I	I	I	X		
c	3			I		I	I	X		
d	2			II	I	I	II		X	
e	5		II	I		II			X	
f	4		III	II		II				X
g	2	II		I	I		II		X	
h	7		II	II		II	I		X	
2	4	II		II	III		II			X
3 a	2	II			II		II		X	
b	4	II	III	II	III	II	I			X

4 Bewertungshinweise

Die Bewertung der erbrachten Prüfungsleistungen hat sich für jede Teilaufgabe nach der am rechten Rand der Aufgabenstellung angegebenen Anzahl maximal erreichbarer Bewertungseinheiten (BE) zu richten.

Für die Bewertung der Gesamtleistung eines Prüflings ist ein Bewertungsraster[2] vorgesehen, das angibt, wie die in den Prüfungsteilen A und B insgesamt erreichten Bewertungseinheiten in Notenpunkte umgesetzt werden.

[2] Das Bewertungsraster ist Teil des Dokuments „Beschreibung der Struktur“, das auf den Internetseiten des IQB zum Download bereitsteht.