Gemeinsame Abituraufgabenpools der Länder

Pool für das Jahr 2021

Aufgaben für das Fach Mathematik

Kurzbeschreibung

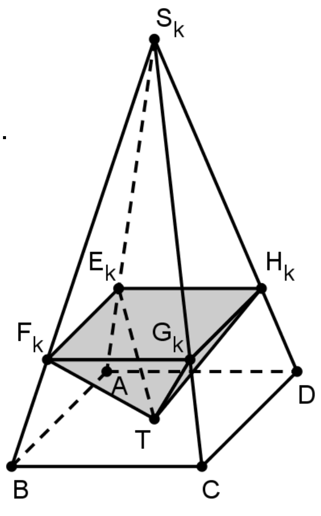
Anforderungsniveau	Prüfungsteil	Sachgebiet[1]	digitales Hilfsmittel
erhöht	B	AG/LA (A2)	CAS

1 Aufgabe

BE

Betrachtet werden die Pyramiden $ABCDS_k$ mit $A(0|0|0)$, $B(2|0|0)$, $C(2|2|0)$, $D(0|2|0)$ und $S_k(1|1|k)$ mit $k \in]1;+\infty[$. Die gemeinsame Grundfläche ABCD dieser Pyramiden ist quadratisch.

Die Abbildung zeigt beispielhaft eine dieser Pyramiden.



a Begründen Sie, dass jede der Pyramiden $ABCDS_k$ gerade ist. Berechnen Sie den Inhalt der Mantelfläche der Pyramide $ABCDS_k$. — 5

b Begründen Sie, dass die Gleichung $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ mit $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ keine Symmetrieebene der Pyramide $ABCDS_k$ beschreibt. Geben Sie für eine Symmetrieebene der Pyramide $ABCDS_k$ eine Gleichung in Koordinatenform an. — 3

c Die Seitenfläche ABS_k liegt in der Ebene L. Bestimmen Sie eine Gleichung von L in Koordinatenform. — 3

(zur Kontrolle: $k \cdot x_2 - x_3 = 0$)

d Bestimmen Sie denjenigen Wert von k, für den die Seitenfläche ABS_k gegenüber der Grundfläche ABCD um einen Winkel der Größe 60° geneigt ist. — 3

[1] verwendete Abkürzungen: AG/LA - Analytische Geometrie/Lineare Algebra, AG/LA (A1) - Analytische Geometrie/Lineare Algebra (Alternative A1), AG/LA (A2) - Analytische Geometrie/Lineare Algebra (Alternative A2)

Der abgebildete Punkt T ist der Schnittpunkt der Diagonalen der Grundfläche ABCD.	
e Der Mittelpunkt der Strecke $\overline{TS_k}$ wird mit Q_k bezeichnet. Für einen Wert von k ist Q_k von der Grundfläche ABCD dreimal so weit entfernt wie von jeder der vier Seitenflächen der Pyramide $ABCDS_k$. Berechnen Sie diesen Wert von k.	4
Die Ebene mit der Gleichung $x_3 = 1$ schneidet die vier vom Punkt S_k ausgehenden Kanten der Pyramide $ABCDS_k$ in den Punkten E_k, F_k, G_k und H_k (vgl. Abbildung).	
f Bestimmen Sie die x_1- und die x_2-Koordinate von F_k.	3
g Bestimmen Sie diejenigen Werte von k, für die das Verhältnis des Volumens der Pyramide $E_kF_kG_kH_kT$ zum Volumen der Pyramide $ABCDS_k$ $1:8$ beträgt.	4
	25

2 Erwartungshorizont

Der Erwartungshorizont stellt für jede Teilaufgabe eine mögliche Lösung dar. Nicht dargestellte korrekte Lösungen sind als gleichwertig zu akzeptieren.

		BE
a	Die Grundfläche liegt in der x_1x_2-Ebene. Der Schnittpunkt ihrer Diagonalen hat die gleichen x_1- und x_2-Koordinaten wie S_k. Mit dem Mittelpunkt $M(2\,\|\,1\,\|\,0)$ von $\overline{BC}$ ergibt sich für den Inhalt der Mantelfläche $4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \left\|\overrightarrow{MS_k}\right\| = 4 \cdot \sqrt{1+k^2}$.	5
b	$\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ mit $\lambda \in \mathbb{R}$ stellt die Gerade durch B und D dar. Der Vektor $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ist nicht parallel zu der Symmetrieebene, die diese Gerade enthält. Gleichung einer Symmetrieebene: $x_1 = 1$	3
c	$\vec{n} = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix}$ und $\vec{n} \circ \overrightarrow{AB} = 0 \wedge \vec{n} \circ \overrightarrow{AS_k} = 0$ liefern $\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ k \\ -1 \end{pmatrix}$ als Normalenvektor von L. Da L den Koordinatenursprung enthält, ergibt sich $L: k \cdot x_2 - x_3 = 0$.	3
d	Mit $\vec{m} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\cos 60° = \frac{\left\|\vec{m} \circ \vec{n}\right\|}{\left\|\vec{m}\right\| \cdot \left\|\vec{n}\right\|}$ ergibt sich für $k \in \left]1; +\infty\right[$ $k = \sqrt{3}$.	3
e	Mit $Q_k\left(1\,\|\,1\,\|\,\frac{k}{2}\right)$ ergibt sich für $k \in \left]1; +\infty\right[$: $3 \cdot \frac{k - \frac{k}{2}}{\sqrt{k^2+1}} = \frac{k}{2} \Leftrightarrow k = 2\sqrt{2}$	4

f	$\begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix}+\sigma\cdot\begin{pmatrix}-1\\1\\k\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\1\end{pmatrix}$ liefert $\sigma=\frac{1}{k}$ und damit $x_1=2-\frac{1}{k}$ und $x_2=\frac{1}{k}$.	3
g	Aufgrund der Ähnlichkeit der Dreiecke ABS_k und $E_kF_kS_k$ gilt $\frac{\lvert E_kF_k\rvert}{\lvert AB\rvert}=\frac{k-1}{k}$. Für $k>1$ liefert $\frac{\frac{1}{3}\cdot\lvert E_kF_k\rvert^2\cdot 1}{\frac{1}{3}\cdot\lvert AB\rvert^2\cdot k}=\frac{1}{8}$ damit $k_1=2$ und $k_2=\sqrt{5}+3$.	4
		25

3 Standardbezug

Teilaufgabe	BE	allgemeine mathematische Kompetenzen						Anforderungsbereich		
		K1	**K2**	**K3**	**K4**	**K5**	**K6**	**I**	**II**	**III**
a	5	I	I		I	I		X		
b	3	II			II	I			X	
c	3					II			X	
d	3					II			X	
e	4	II	III		I	III	II			X
f	3	I	II		I	I	I		X	
g	4	II	III		II	II				X

4 Bewertungshinweise

Die Bewertung der erbrachten Prüfungsleistungen hat sich für jede Teilaufgabe nach der am rechten Rand der Aufgabenstellung angegebenen Anzahl maximal erreichbarer Bewertungseinheiten (BE) zu richten.

Für die Bewertung der Gesamtleistung eines Prüflings ist ein Bewertungsraster[2] vorgesehen, das angibt, wie die in den Prüfungsteilen A und B insgesamt erreichten Bewertungseinheiten in Notenpunkte umgesetzt werden.

[2] Das Bewertungsraster ist Teil des Dokuments „Beschreibung der Struktur“, das auf den Internetseiten des IQB zum Download bereitsteht.