

Gemeinsame Abituraufgabenpools der Länder

Pool für das Jahr 2020

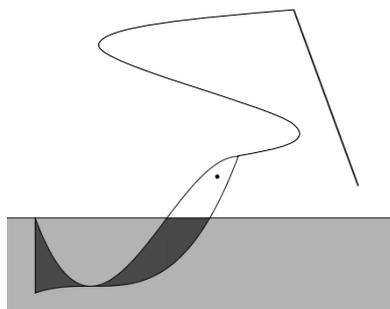
Aufgaben für das Fach Mathematik

Kurzbeschreibung

Anforderungsniveau	Prüfungsteil	Sachgebiet ¹	digitales Hilfsmittel
grundlegend	B	Analysis	WTR

1 Aufgabe

Die Abbildung zeigt das Logo eines Geschäfts für Anglerbedarf. Die obere Spitze der Schwanzflosse des Fisches liegt auf der Wasseroberfläche; die Strecke zwischen oberer und unterer Spitze der Schwanzflosse steht senkrecht zur Wasseroberfläche.



Bei Verwendung eines geeigneten Koordinatensystems kann die untere Begrenzungslinie des Fisches mithilfe der in \mathbb{R} definierten Funktion $u: x \mapsto \frac{1}{8}x^3$, die obere Begrenzungslinie mithilfe der in \mathbb{R} definierten Funktion $v: x \mapsto \frac{1}{4}x^2 \cdot (4-x)$ beschrieben und die Wasseroberfläche durch die Gerade mit der Gleichung $y = \frac{5}{4}$ dargestellt werden.

a Zeigen Sie, dass

- ◆ die Graphen von u und v nur die Punkte $P(0|0)$ und $Q\left(\frac{8}{3} \mid \frac{64}{27}\right)$ gemeinsam haben;
- ◆ $v'(x) = -\frac{3}{4}x^2 + 2x$ ein Term der ersten Ableitungsfunktion von v ist.

BE

5

¹ verwendete Abkürzungen: AG/LA (A1) - Analytische Geometrie/Lineare Algebra (Alternative A1),
AG/LA (A2) - Analytische Geometrie/Lineare Algebra (Alternative A2)

- b** Weisen Sie nach, dass der Punkt Q ein Extrempunkt des Graphen von v ist, und geben Sie die Art dieses Extrempunkts an. 3
- c** Beurteilen Sie die folgende Aussage: 3
Für jeden Wert von $x \in]0; \frac{8}{3}[$ ist die Steigung des Graphen von v größer als die Steigung des Graphen von u .
- d** Die Ausdehnung des Fisches in y -Richtung beträgt $\frac{539}{216}$. Ermitteln Sie damit die Ausdehnung des Fisches in x -Richtung. 5
(zur Kontrolle: Die Ausdehnung in x -Richtung beträgt $\frac{11}{3}$.)
- e** Berechnen Sie den Flächeninhalt der Schwanzflosse des Fisches. 3
- f** Bezeichnet man die Lösung der Gleichung $v(x) = \frac{5}{4}$ für $0 < x \leq \frac{8}{3}$ mit x_1 und die Lösung der Gleichung $u(x) = \frac{5}{4}$ mit x_2 , so ist der Wert des Terms 5

$$\int_{-1}^{x_1} (v(x) - u(x)) dx + \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{5}{4} - u(x)\right) dx$$
 die Lösung einer Aufgabe im vorliegenden Sachzusammenhang. Formulieren Sie eine passende Aufgabenstellung und beschreiben Sie die Bedeutung der beiden Integrale im Zusammenhang mit der Aufgabe.
- Das Logo des Geschäfts soll verändert werden. Für die obere Begrenzungslinie des Fisches wird weiterhin die Funktion v verwendet. Die untere Begrenzungslinie jedoch soll anstelle von u mithilfe einer anderen der in \mathbb{R} definierten Funktionen $u_k : x \mapsto \frac{1}{8}k \cdot x^3$ mit $k > 0$ beschrieben werden. Der gemeinsame Punkt der Graphen von u_k und v , der die x -Koordinate $\frac{8}{k+2}$ hat, stellt die Kopfspitze dar.
- g** Weisen Sie nach, dass die x -Achse für alle Werte von k Tangente an den Graphen von u_k in dessen Wendepunkt ist. 3
- h** Bestimmen Sie, wie der Wert von k gewählt werden müsste, damit die Ausdehnung der Schwanzflosse in y -Richtung $\frac{3}{2}$ beträgt. 4
- i** Die Graphen von u_k und v schließen mit der Strecke zwischen oberer und unterer Spitze der Schwanzflosse jeweils einen Winkel ein. Für einen Wert von k sind die beiden Winkel gleich groß. Prüfen Sie, ob die Kopfspitze für diesen Wert von k oberhalb der Wasseroberfläche liegt. 4

2 Erwartungshorizont

Der Erwartungshorizont stellt für jede Teilaufgabe eine mögliche Lösung dar. Nicht dargestellte korrekte Lösungen sind als gleichwertig zu akzeptieren.

	BE
a ♦ $u(x) = v(x) \Leftrightarrow \frac{1}{8}x^3 = -\frac{1}{4}x^3 + x^2 \Leftrightarrow \frac{3}{8}x^2 \cdot \left(x - \frac{8}{3}\right) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = \frac{8}{3}$ $u(0) = 0, u\left(\frac{8}{3}\right) = \frac{64}{27}$ ♦ Mit $v(x) = -\frac{1}{4}x^3 + x^2$ ergibt sich $v'(x) = -\frac{3}{4}x^2 + 2x$.	5
b $v''(x) = -\frac{3}{2}x + 2$ Es gilt $v'\left(\frac{8}{3}\right) = 0$ und $v''\left(\frac{8}{3}\right) < 0$, d. h. Q ist Hochpunkt des Graphen von v.	3
c Die Aussage ist falsch. Begründung: Mit $u'(x) = \frac{3}{8}x^2$ ergibt sich $v'(2) = 1 < \frac{3}{2} = u'(2)$.	3
d Für die y-Koordinate der unteren Spitze der Schwanzflosse ergibt sich $\frac{64}{27} - \frac{539}{216} = -\frac{1}{8}$. Mit $u(x) = -\frac{1}{8} \Leftrightarrow x^3 = -1 \Leftrightarrow x = -1$ ergibt sich für die Ausdehnung in x-Richtung $1 + \frac{8}{3} = \frac{11}{3}$.	5
e $\int_{-1}^0 (v(x) - u(x)) dx = \int_{-1}^0 \left(x^2 - \frac{3}{8}x^3\right) dx = \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{32}x^4\right]_{-1}^0 = \frac{1}{3} + \frac{3}{32} = \frac{41}{96}$	3
f Aufgabenstellung: Bestimmen Sie den Flächeninhalt des dunkelgrau markierten Teils des Fisches. Beschreibung: Die Werte der Integrale sind die Inhalte der Flächen, die der Graph von u mit dem Graphen von v sowie den Geraden mit den Gleichungen $x = -1$ und $x = x_1$ bzw. mit der Gerade mit der Gleichung $y = \frac{5}{4}$ sowie den Geraden mit den Gleichungen $x = x_1$ und $x = x_2$ einschließt.	5
g Der Wendepunkt des Graphen von u_k ist $(0 0)$. Mit $u'_k(x) = \frac{3}{8}k \cdot x^2$ ergibt sich $u'_k(0) = 0$.	3
h $u_k(-1) = \frac{5}{4} - \frac{3}{2} \Leftrightarrow -\frac{1}{8}k = -\frac{1}{4} \Leftrightarrow k = 2$	4
i $v'(-1) = -\frac{11}{4}$ $u'_k(-1) = \frac{11}{4} \Leftrightarrow \frac{3}{8}k = \frac{11}{4} \Leftrightarrow k = \frac{22}{3}$ $u_{\frac{22}{3}}\left(\frac{8}{\frac{22}{3}+2}\right) = \frac{198}{343} < \frac{5}{4}$, d. h. die Kopfspitze liegt nicht oberhalb der Wasseroberfläche.	4
	35

3 Standardbezug

Teilaufgabe	BE	allgemeine mathematische Kompetenzen						Anforderungsbereich		
		K1	K2	K3	K4	K5	K6	I	II	III
a	5					I		X		
b	3	I				I		X		
c	3	II	II		II	I			X	
d	5	II	II	I	I	I			X	
e	3			I	I	II			X	
f	5	III	III	II	II		II			X
g	3					I		X		
h	4		II	I	I	I			X	
i	4	III	III	I		II				X

4 Bewertungshinweise

Die Bewertung der erbrachten Prüfungsleistungen hat sich für jede Teilaufgabe nach der am rechten Rand der Aufgabenstellung angegebenen Anzahl maximal erreichbarer Bewertungseinheiten (BE) zu richten.

Für die Bewertung der Gesamtleistung eines Prüflings ist ein Bewertungsraster² vorgesehen, das angibt, wie die in den Prüfungsteilen A und B insgesamt erreichten Bewertungseinheiten in Notenpunkte umgesetzt werden.

² Das Bewertungsraster ist Teil des Dokuments „Beschreibung der Struktur“, das auf den Internetseiten des IQB zum Download bereitsteht.