

Gemeinsame Abituraufgabenpools der Länder

## Pool für das Jahr 2020

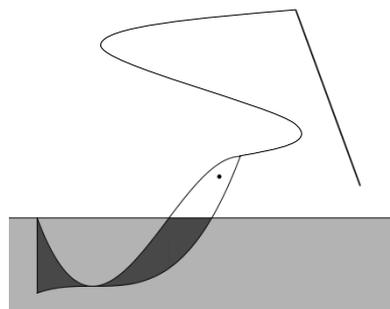
Aufgaben für das Fach Mathematik

### Kurzbeschreibung

Anforderungsniveau	Prüfungsteil	Sachgebiet <sup>1</sup>	digitales Hilfsmittel
grundlegend	B	Analysis	CAS

### 1 Aufgabe

Die Abbildung zeigt das Logo eines Geschäfts für Anglerbedarf. Die obere Spitze der Schwanzflosse des Fisches liegt auf der Wasseroberfläche; die Strecke zwischen oberer und unterer Spitze der Schwanzflosse steht senkrecht zur Wasseroberfläche.



Bei Verwendung eines geeigneten Koordinatensystems kann die untere Begrenzungslinie des Fisches mithilfe der in  $\mathbb{R}$  definierten Funktion  $u: x \mapsto \frac{1}{8}x^3$ , die obere Begrenzungslinie mithilfe der in  $\mathbb{R}$  definierten Funktion  $v: x \mapsto \frac{1}{4}x^2 \cdot (4 - x)$  beschrieben und die Wasseroberfläche durch die Gerade mit der Gleichung  $y = \frac{5}{4}$  dargestellt werden.

**a** Zeigen Sie, dass die Graphen von  $u$  und  $v$  nur die Punkte  $P(0|0)$  und  $Q\left(\frac{8}{3}|\frac{64}{27}\right)$  gemeinsam haben.

BE

3

**b** Weisen Sie nach, dass der Punkt  $Q$  ein Extrempunkt des Graphen von  $v$  ist, und geben Sie die Art dieses Extrempunkts an.

3

<sup>1</sup> verwendete Abkürzungen: AG/LA (A1) - Analytische Geometrie/Lineare Algebra (Alternative A1),  
AG/LA (A2) - Analytische Geometrie/Lineare Algebra (Alternative A2)

<p><b>c</b> Entscheiden Sie für jede der Aussagen I und II, ob sie richtig oder falsch ist. Begründen Sie Ihre Entscheidung jeweils rechnerisch.</p> <p>I Für jeden Wert von <math>x \in ]0; \frac{8}{3}[</math> ist die Steigung des Graphen von <math>v</math> größer als die Steigung des Graphen von <math>u</math>.</p> <p>II Die Graphen von <math>u</math> und <math>v</math> berühren sich im Punkt P.</p>	4
<p><b>d</b> Berechnen Sie die Ausdehnung des Fisches in x-Richtung und in y-Richtung.</p>	5
<p><b>e</b> Der dunkelgrau markierte Teil des Fisches befindet sich im Wasser. Bestimmen Sie den Flächeninhalt dieses Teils des Fisches.</p> <p>Das Logo des Geschäfts soll verändert werden. Für die obere Begrenzungslinie des Fisches wird weiterhin die Funktion <math>v</math> verwendet. Die untere Begrenzungslinie jedoch soll anstelle von <math>u</math> mithilfe einer anderen der in <math>\mathbb{R}</math> definierten Funktionen <math>u_k : x \mapsto \frac{1}{8}k \cdot x^3</math> mit <math>k &gt; 0</math> beschrieben werden. Der gemeinsame Punkt der Graphen von <math>u_k</math> und <math>v</math>, der die x-Koordinate <math>\frac{8}{k+2}</math> hat, stellt die Kopfspitze dar.</p>	6
<p><b>f</b> Weisen Sie nach, dass die x-Achse für alle Werte von <math>k</math> Tangente an den Graphen von <math>u_k</math> in dessen Wendepunkt ist.</p>	2
<p><b>g</b> Bestimmen Sie, wie der Wert von <math>k</math> gewählt werden müsste, damit die Ausdehnung der Schwanzflosse in y-Richtung <math>\frac{3}{2}</math> beträgt.</p>	3
<p><b>h</b> Beschreiben Sie den Einfluss des Parameters <math>k</math> auf die Lage der Kopfspitze.</p>	2
<p><b>i</b> Untersuchen Sie für jede der folgenden Eigenschaften I, II und III, für welche Werte von <math>k</math> diese zutrifft.</p> <p>I Die Kopfspitze ragt aus dem Wasser heraus.</p> <p>II Die obere Begrenzungslinie des Fisches verläuft an der Kopfspitze parallel zur Wasseroberfläche.</p> <p>III Die Kopfspitze ist der höchste Punkt des Fisches.</p>	7
35	

## 2 Erwartungshorizont

Der Erwartungshorizont stellt für jede Teilaufgabe eine mögliche Lösung dar. Nicht dargestellte korrekte Lösungen sind als gleichwertig zu akzeptieren.

	BE
<p><b>a</b> <math>u(x) = v(x) \Leftrightarrow x = 0 \vee x = \frac{8}{3}</math>  <math>u(0) = 0, u(\frac{8}{3}) = \frac{64}{27}</math></p>	3
<p><b>b</b> Es gilt <math>v'(\frac{8}{3}) = 0</math> und <math>v''(\frac{8}{3}) &lt; 0</math>, d. h. Q ist Hochpunkt des Graphen von <math>v</math>.</p>	3
<p><b>c</b> I: Die Aussage ist falsch, da <math>u'(2) &gt; v'(2)</math>.                      II: Die Aussage ist richtig, da die Graphen von <math>u</math> und <math>v</math> den Punkt P gemeinsam ha-</p>	4

	ben und $u(x) < v(x)$ für alle $x \in \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right] \setminus \{0\}$ gilt.	
<b>d</b>	Für $x \leq 0$ gilt $v(x) = \frac{5}{4} \Leftrightarrow x = -1$ . Ausdehnung in x-Richtung: $1 + \frac{8}{3} \approx 3,7$ Ausdehnung in y-Richtung: $\frac{64}{27} - u(-1) \approx 2,5$	5
<b>e</b>	Die Lösung der Gleichung $v(x) = \frac{5}{4}$ für $0 < x \leq \frac{8}{3}$ wird mit $x_1$ bezeichnet, die Lösung der Gleichung $u(x) = \frac{5}{4}$ mit $x_2$ . $\int_{-1}^{x_1} (v(x) - u(x)) dx + \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{5}{4} - u(x)\right) dx \approx 1,4$	6
<b>f</b>	Der Wendepunkt des Graphen von $u_k$ ist $(0 0)$ . Es gilt $u'_k(0) = 0$ .	2
<b>g</b>	$u_k(-1) = \frac{5}{4} - \frac{3}{2} \Leftrightarrow k = 2$	3
<b>h</b>	Mit zunehmendem Wert von $k$ bewegt sich die Kopfspitze in negative x-Richtung und dabei für $k \leq 1$ in positive y-Richtung und für $k \geq 1$ in negative y-Richtung.	2
<b>i</b>	I: $u_k\left(\frac{8}{k+2}\right) > \frac{5}{4} \Leftrightarrow \frac{10-4\sqrt{5}}{5} < k < \frac{10+4\sqrt{5}}{5}$ II: Für $k > 0$ gilt: $v'\left(\frac{8}{k+2}\right) = 0 \Leftrightarrow k = 1$ III: Die x-Koordinate des Hochpunkts des Graphen von $v$ ist unabhängig von $k$ . Mit zunehmendem Wert von $k$ bewegt sich der Schnittpunkt der Graphen von $u_k$ und $v$ in negative x-Richtung. Mit I und II folgt: $1 \leq k < \frac{10+4\sqrt{5}}{5}$	7
		35

### 3 Standardbezug

Teilaufgabe	BE	allgemeine mathematische Kompetenzen						Anforderungsbereich		
		K1	K2	K3	K4	K5	K6	I	II	III
<b>a</b>	3					I		X		
<b>b</b>	3	I				I		X		
<b>c</b>	4	II	II		II	I			X	
<b>d</b>	5	II	II	I	I	I			X	
<b>e</b>	6		II	I		II			X	
<b>f</b>	2					I		X		
<b>g</b>	3		II	I	I	I			X	
<b>h</b>	2				I	I	I	X		
<b>i</b>	7	III	III	I		II				X

## 4 Bewertungshinweise

---

Die Bewertung der erbrachten Prüfungsleistungen hat sich für jede Teilaufgabe nach der am rechten Rand der Aufgabenstellung angegebenen Anzahl maximal erreichbarer Bewertungseinheiten (BE) zu richten.

Für die Bewertung der Gesamtleistung eines Prüflings ist ein Bewertungsraster<sup>2</sup> vorgesehen, das angibt, wie die in den Prüfungsteilen A und B insgesamt erreichten Bewertungseinheiten in Notenpunkte umgesetzt werden.

---

<sup>2</sup> Das Bewertungsraster ist Teil des Dokuments „Beschreibung der Struktur“, das auf den Internetseiten des IQB zum Download bereitsteht.