Gemeinsame Abituraufgabenpools der Länder

Pool für das Jahr 2020

Aufgaben für das Fach Mathematik

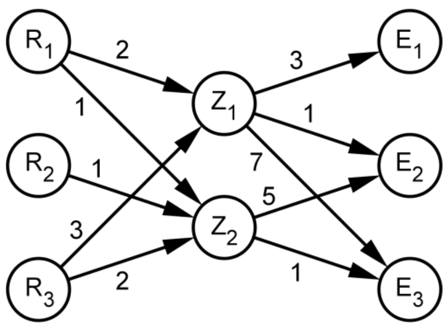
Kurzbeschreibung

Anforderungsniveau	Prüfungsteil	Sachgebiet[1]	digitales Hilfsmittel
grundlegend	B	AG/LA (A1)	WTR

1 Aufgabe

BE

1 Aus den Rohstoffen R_1, R_2 und R_3 werden die Zwischenprodukte Z_1 und Z_2 und daraus die Endprodukte E_1, E_2 und E_3 hergestellt. Die Abbildung veranschaulicht den Herstellungsprozess, wobei der jeweilige Bedarf an einem Rohstoff bzw. Zwischenprodukt in Mengeneinheiten angegeben ist.



Der Bedarf an Rohstoffen für die erste Stufe des Herstellungsprozesses kann mithilfe der Gleichung $\begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$ beschrieben werden, der Bedarf an Zwischenprodukten für die zweite Stufe mithilfe der Gleichung $\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = B \cdot \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix}$. Dabei geben die Einträge der Vektoren die Anzahlen der Mengeneinheiten der Rohstoffe bzw. der Zwischenprodukte bzw. der Endprodukte an, beispielsweise r_1 die Anzahl der Mengeneinheiten von R_1.

[1] verwendete Abkürzungen: AG/LA (A1) - Analytische Geometrie/Lineare Algebra (Alternative A1), AG/LA (A2) - Analytische Geometrie/Lineare Algebra (Alternative A2)

a Geben Sie die Bedeutung der Gleichung $\begin{pmatrix}3\\3\\6\end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix}0\\3\end{pmatrix}$ im Sachzusammenhang an. 1

b Eine der folgenden Matrizen stellt B dar. Geben Sie diese Matrix an und begründen Sie Ihre Angabe. 2

I $\begin{pmatrix}3 & 0\\1 & 5\\7 & 1\end{pmatrix}$ II $\begin{pmatrix}3 & 1 & 7\\0 & 5 & 1\end{pmatrix}$ III $\begin{pmatrix}3 & 1 & 7\\0 & 5 & 1\\0 & 0 & 0\end{pmatrix}$

c Es gilt $A \cdot B = \begin{pmatrix}6 & 7 & 15\\a & 5 & 1\\9 & 13 & 23\end{pmatrix}$. Begründen Sie im Sachzusammenhang, dass $a = 0$ gilt. 2

d Zur Herstellung der beiden Endprodukte E_1 und E_2 stehen 510 Mengeneinheiten von R_1, 150 Mengeneinheiten von R_2 und 840 Mengeneinheiten von R_3 zur Verfügung. Ermitteln Sie, wie viele Mengeneinheiten von E_1 und E_2 jeweils hergestellt werden müssen, damit diese Rohstoffe vollständig aufgebraucht werden. 4

2 Betrachtet wird das Viereck ABCD mit $A(5|0|0)$, $B(0|8|-6)$, $C(-5|0|0)$ und $D(0|-8|6)$.

a Weisen Sie nach, dass das Viereck ABCD eine Raute, aber kein Quadrat ist. 3

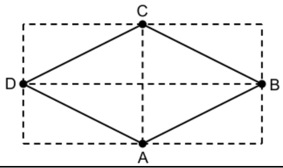
b Begründen Sie mithilfe einer Skizze, dass der Flächeninhalt der Raute ABCD mithilfe des Terms $\frac{1}{2} \cdot \left|\overrightarrow{AC}\right| \cdot \left|\overrightarrow{BD}\right|$ berechnet werden kann. 3

c Ein Kreis berührt jede der vier Seiten der Raute ABCD. Begründen Sie, dass $P(4|1{,}6|-1{,}2)$ einer der Berührpunkte ist. 5

2 Erwartungshorizont

Der Erwartungshorizont stellt für jede Teilaufgabe eine mögliche Lösung dar. Nicht dargestellte korrekte Lösungen sind als gleichwertig zu akzeptieren.

			BE
1	**a**	Zur Herstellung von 3 Mengeneinheiten von Z_2 sind 3 Mengeneinheiten von R_1, 3 Mengeneinheiten von R_2 und 6 Mengeneinheiten von R_3 erforderlich.	1
	b	Aus $\begin{pmatrix}z_1\\z_2\end{pmatrix} = B \cdot \begin{pmatrix}e_1\\e_2\\e_3\end{pmatrix}$ folgt, dass B drei Spalten und zwei Zeilen haben muss. B wird also durch die Matrix II dargestellt.	2

	c	a gibt die Anzahl der Mengeneinheiten von R_2 an, die für die Herstellung einer Mengeneinheit von E_1 erforderlich sind. Für die Herstellung von E_1 wird nur das Zwischenprodukt Z_1 benötigt, das ohne Verwendung von R_2 hergestellt wird.	2
	d	$\begin{pmatrix} 6 & 7 & 15 \\ 0 & 5 & 1 \\ 9 & 13 & 23 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 510 \\ 150 \\ 840 \end{pmatrix}$ liefert das folgende Gleichungssystem: I $6e_1 + 7e_2 = 510$ II $5e_2 = 150$ III $9e_1 + 13e_2 = 840$ Aus II ergibt sich $e_2 = 30$ und damit aus I $e_1 = \frac{1}{6} \cdot (510 - 7 \cdot 30) = 50$. Es müssen also 50 Mengeneinheiten von E_1 und 30 Mengeneinheiten von E_2 hergestellt werden.	4
2	a	$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -5 \\ 8 \\ -6 \end{pmatrix} = \overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} -5 \\ -8 \\ 6 \end{pmatrix} = \overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AB} \circ \overrightarrow{AD} \neq 0$	3
	b	 Der Flächeninhalt der Raute ist halb so groß wie der Flächeninhalt eines Rechtecks mit den Seitenlängen $\left\lvert\overrightarrow{AC}\right\rvert$ und $\left\lvert\overrightarrow{BD}\right\rvert$.	3
	c	$\overrightarrow{AP} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1{,}6 \\ -1{,}2 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ 8 \\ -6 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \cdot \overrightarrow{AB}$, d. h. P liegt auf $\overline{AB}$. Der Mittelpunkt des Kreises ist der Schnittpunkt der Diagonalen der Raute, also der Koordinatenursprung. Es gilt $\overrightarrow{OP} \circ \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1{,}6 \\ -1{,}2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -5 \\ 8 \\ -6 \end{pmatrix} = -20 + 12{,}8 + 7{,}2 = 0$.	5

3 Standardbezug

Teilaufgabe	BE	allgemeine mathematische Kompetenzen						Anforderungsbereich		
		K1	K2	K3	K4	K5	K6	I	II	III
1 a	1				I		I	X		
b	2	I			I	I		X		
c	2	I		II	II		I		X	
d	4		II	II		II			X	
2 a	3	I				I		X		
b	3	II			I		II		X	
c	5	III	III			II	II			X

4 Bewertungshinweise

Die Bewertung der erbrachten Prüfungsleistungen hat sich für jede Teilaufgabe nach der am rechten Rand der Aufgabenstellung angegebenen Anzahl maximal erreichbarer Bewertungseinheiten (BE) zu richten.

Für die Bewertung der Gesamtleistung eines Prüflings ist ein Bewertungsraster[2] vorgesehen, das angibt, wie die in den Prüfungsteilen A und B insgesamt erreichten Bewertungseinheiten in Notenpunkte umgesetzt werden.

[2] Das Bewertungsraster ist Teil des Dokuments „Beschreibung der Struktur“, das auf den Internetseiten des IQB zum Download bereitsteht.