

Gemeinsame Abituraufgabenpools der Länder

Pool für das Jahr 2020

Aufgaben für das Fach Mathematik

Kurzbeschreibung

| Anforderungsniveau | Prüfungsteil | Sachgebiet ¹ | digitales Hilfsmittel |
|--------------------|--------------|-------------------------|-----------------------|
| erhöht | B | Stochastik | CAS |

1 Aufgabe

- 1** Betrachtet werden Bauteile der Kategorien A und B, die jeweils elektrische Widerstände enthalten. Es gilt:
- ◆ Ein Bauteil der Kategorie A ist funktionstüchtig, wenn alle enthaltenen Widerstände funktionstüchtig sind.
 - ◆ Ein Bauteil der Kategorie B ist funktionstüchtig, wenn mindestens einer der enthaltenen Widerstände funktionstüchtig ist.

Zunächst soll davon ausgegangen werden, dass jeder Widerstand mit einer Wahrscheinlichkeit von 98 % funktionstüchtig ist.

- a** Ermitteln Sie mithilfe eines Baumdiagramms oder einer Vierfeldertafel die Wahrscheinlichkeiten der folgenden Ereignisse:

E_1 : „Ein Bauteil der Kategorie A, das zwei Widerstände enthält, ist funktionstüchtig.“

E_2 : „Ein Bauteil der Kategorie B, das zwei Widerstände enthält, ist funktionstüchtig.“

- b** Beurteilen Sie die folgende Aussage:

Je mehr Widerstände ein Bauteil der Kategorie A enthält, desto kleiner ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass es funktionstüchtig ist.

BE

6

3

¹ verwendete Abkürzungen: AG/LA (A1) - Analytische Geometrie/Lineare Algebra (Alternative A1),
AG/LA (A2) - Analytische Geometrie/Lineare Algebra (Alternative A2)

Bei veränderten Bedingungen ist für jeden Widerstand die Wahrscheinlichkeit dafür, dass er funktionstüchtig ist, p .

c Betrachtet wird ein Bauteil der Kategorie B, das zwei Widerstände enthält. Weisen Sie nach, dass die Wahrscheinlichkeit dafür, dass dieses Bauteil funktionstüchtig ist, durch den Term $2p - p^2$ angegeben wird. 2

d Betrachtet werden zehn Bauteile der Kategorie B, die jeweils zwei Widerstände enthalten. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass diese Bauteile alle funktionstüchtig sind, beträgt 95 %. Bestimmen Sie den Wert von p . 3

e Betrachtet wird eine Kombination aus zwei Bestandteilen: einem einzelnen Widerstand und einem Bauteil der Kategorie A, das zwei Widerstände enthält. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass diese Kombination funktionstüchtig ist, wird durch den Term $1 - (1-p) \cdot (1-p^2)$ angegeben. Geben Sie die Abhängigkeit der Funktionstüchtigkeit dieser Kombination von der Funktionstüchtigkeit seiner beiden Bestandteile an. Begründen Sie Ihre Angabe. 3

2 Einem Unternehmen wird eine sehr große Anzahl von Widerständen geliefert. Um den Anteil der funktionstüchtigen Widerstände zu schätzen, werden Stichproben entnommen.

a In einer Stichprobe von 200 Widerständen sind 176 Widerstände funktionstüchtig. Berechnen Sie zu diesem Anteil das Konfidenzintervall zur Sicherheitswahrscheinlichkeit 95 %. Beschreiben Sie die Bedeutung dieses Konfidenzintervalls im Sachzusammenhang. 4

b Gegeben ist die folgende Näherungslösung einer Aufgabe im Sachzusammenhang: 4

$$2 \cdot 1,96 \cdot \sqrt{\frac{h(1-h)}{n}} \leq 0,05$$

$$\sqrt{\frac{h(1-h)}{n}} \leq \sqrt{\frac{0,5^2}{n}} \text{ für alle } h \in [0;1]$$

$$2 \cdot 1,96 \cdot \sqrt{\frac{0,5^2}{n}} \leq 0,05 \text{ liefert } n \geq 1537$$

Formulieren Sie eine passende Aufgabenstellung und erläutern Sie die beiden ersten Zeilen des Lösungswegs.

2 Erwartungshorizont

Der Erwartungshorizont stellt für jede Teilaufgabe eine mögliche Lösung dar. Nicht dargestellte korrekte Lösungen sind als gleichwertig zu akzeptieren.

| | | BE | | | | | | | | | | | | | | | | |
|------------------|---|------------------|-------|------------------|--|-------|--------|--------|------|------------------|--------|--------|------|--|------|--|--|---|
| 1 | <p>a W_1: Der eine der beiden Widerstände ist funktionstüchtig. W_2: Der andere der beiden Widerstände ist funktionstüchtig.</p> <table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <tr> <td></td> <td>W_1</td> <td>$\overline{W_1}$</td> <td></td> </tr> <tr> <td>W_2</td> <td>0,9604</td> <td>0,0196</td> <td>0,98</td> </tr> <tr> <td>$\overline{W_2}$</td> <td>0,0196</td> <td>0,0004</td> <td>0,02</td> </tr> <tr> <td></td> <td>0,98</td> <td></td> <td></td> </tr> </table> <p> $P(E_1) = 0,9604$ $P(E_2) = 1 - 0,0004 = 0,9996$ </p> | | W_1 | $\overline{W_1}$ | | W_2 | 0,9604 | 0,0196 | 0,98 | $\overline{W_2}$ | 0,0196 | 0,0004 | 0,02 | | 0,98 | | | 6 |
| | W_1 | $\overline{W_1}$ | | | | | | | | | | | | | | | | |
| W_2 | 0,9604 | 0,0196 | 0,98 | | | | | | | | | | | | | | | |
| $\overline{W_2}$ | 0,0196 | 0,0004 | 0,02 | | | | | | | | | | | | | | | |
| | 0,98 | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| | <p>b Die Aussage ist richtig. Begründung: Ein Bauteil der Kategorie A, das n Widerstände enthält, ist mit einer Wahrscheinlichkeit von $0,98^n$ funktionstüchtig. Der Wert von $0,98^n$ nimmt mit zunehmendem Wert von n ab.</p> | 3 | | | | | | | | | | | | | | | | |
| | <p>c $1 - (1-p)^2 = 2p - p^2$</p> | 2 | | | | | | | | | | | | | | | | |
| | <p>d Für $0 \leq p \leq 1$ liefert $(2p - p^2)^{10} = 0,95$: $p \approx 0,928$</p> | 3 | | | | | | | | | | | | | | | | |
| | <p>e Die Kombination ist funktionstüchtig, wenn mindestens einer der beiden Bestandteile funktionstüchtig ist. Begründung: $1-p$ ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der einzelne Widerstand nicht funktionstüchtig ist, $1-p^2$ die Wahrscheinlichkeit dafür, dass das Bauteil der Kategorie A nicht funktionstüchtig ist. Damit ist $(1-p) \cdot (1-p^2)$ die Wahrscheinlichkeit dafür, dass beide Bestandteile nicht funktionstüchtig sind. Der angegebene Term gibt die Wahrscheinlichkeit des zugehörigen Gegenereignisses an.</p> | 3 | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 2 | <p>a $h-p \leq 1,96 \cdot \sqrt{\frac{p(1-p)}{200}}$ liefert mit $h = \frac{176}{200}$ näherungsweise $[0,828; 0,918]$. Hinweis: Bei Verwendung anderer Näherungsverfahren können sich abweichende Ergebnisse für das Konfidenzintervall ergeben. Das berechnete Konfidenzintervall ist die Menge aller Werte p, für die gilt: Unter der Annahme, dass p der tatsächliche Anteil funktionstüchtiger Widerstände ist, liegt $\frac{176}{200}$ in dem bezüglich p symmetrischen Intervall von Anteilen funktionstüchtiger Widerstände, die in einer Stichprobe von 200 Widerständen insgesamt mit einer Wahrscheinlichkeit von 95 % auftreten.</p> | 4 | | | | | | | | | | | | | | | | |
| | <p>b Aufgabenstellung: Ermitteln Sie, wie groß der Umfang einer Stichprobe mindestens sein muss, damit die Länge des Konfidenzintervalls zur Sicherheitswahrscheinlichkeit 95 % für jeden Anteil funktionstüchtiger Widerstände in der Stichprobe höchst-</p> | 4 | | | | | | | | | | | | | | | | |

tens 0,05 beträgt.

Erläuterung: Die Länge des Konfidenzintervalls, die höchstens 0,05 betragen soll, kann – abhängig vom Stichprobenumfang n und vom Anteil h der funktionstüchtigen Widerstände in der Stichprobe – mithilfe des Terms $2 \cdot 1,96 \cdot \sqrt{\frac{h \cdot (1-h)}{n}}$ näherungsweise berechnet werden. Dieser Term nimmt für $h = 0,5$ sein Maximum an.

25

3 Standardbezug

| Teilaufgabe | BE | allgemeine mathematische Kompetenzen | | | | | | Anforderungsbereich | | |
|-------------|----|--------------------------------------|-----|-----|----|----|----|---------------------|----|-----|
| | | K1 | K2 | K3 | K4 | K5 | K6 | I | II | III |
| 1 a | 6 | | | I | I | I | I | X | | |
| b | 3 | II | | I | | I | II | | X | |
| c | 2 | | | II | | I | I | | X | |
| d | 3 | | II | I | | I | | | X | |
| e | 3 | III | | II | II | | II | | | X |
| 2 a | 4 | | | II | | I | II | | X | |
| b | 4 | III | III | III | II | II | II | | | X |

4 Bewertungshinweise

Die Bewertung der erbrachten Prüfungsleistungen hat sich für jede Teilaufgabe nach der am rechten Rand der Aufgabenstellung angegebenen Anzahl maximal erreichbarer Bewertungseinheiten (BE) zu richten.

Für die Bewertung der Gesamtleistung eines Prüflings ist ein Bewertungsraster² vorgesehen, das angibt, wie die in den Prüfungsteilen A und B insgesamt erreichten Bewertungseinheiten in Notenpunkte umgesetzt werden.

² Das Bewertungsraster ist Teil des Dokuments „Beschreibung der Struktur“, das auf den Internetseiten des IQB zum Download bereitsteht.