

Gemeinsame Abituraufgabenpools der Länder

## Pool für das Jahr 2020

### Aufgaben für das Fach Mathematik

#### Kurzbeschreibung

Anforderungsniveau	Prüfungsteil	Sachgebiet <sup>1</sup>	digitales Hilfsmittel
erhöht	B	Stochastik	CAS

#### 1 Aufgabe

Die Bigband einer Schule nimmt anlässlich des 50-jährigen Jubiläums der Schule eine CD mit zehn Musikstücken auf; vier dieser Stücke sind kurz, sechs lang. Diese CD wird in großer Anzahl hergestellt.

- 1** Bei der Jubiläumsfeier werden von einer dieser CDs in zufälliger Reihenfolge Stücke abgespielt, wobei jedes Stück auch mehrfach abgespielt werden kann.
- a** Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die ersten drei abgespielten Stücke verschieden sind. 2
- b** Berechnen Sie jeweils die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sich unter zwölf abgespielten Stücken
- ◆ genau fünf lange Stücke befinden.
  - ◆ mehr lange als kurze Stücke befinden.
- 2** Als die CDs vor der Jubiläumsfeier geliefert wurden, entdeckten die Mitglieder der Bigband unter den ersten 20 betrachteten CDs ein Exemplar mit fehlerhafter Hülle und befürchteten, dass mindestens 5 % aller Hüllen fehlerhaft sind. Sie planten deshalb die Durchführung eines Signifikanztests mit einem Signifikanzniveau von 10 % und der Nullhypothese „Der Anteil der fehlerhaften Hüllen ist kleiner als 5 %.“ Sollte das Ergebnis des Tests dafür sprechen, dass die Befürchtung zutrifft, wollten sie beim Hersteller einen Preisnachlass verlangen.
- a** Geben Sie eine Überlegung an, die zur Wahl der Nullhypothese geführt haben 3

BE

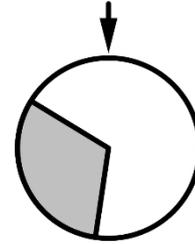
<sup>1</sup> verwendete Abkürzungen: AG/LA (A1) - Analytische Geometrie/Lineare Algebra (Alternative A1),  
AG/LA (A2) - Analytische Geometrie/Lineare Algebra (Alternative A2)

könnte, und begründen Sie Ihre Angabe.

**b** Dem Test wurde eine Stichprobe von 150 CDs zugrunde gelegt. Bestimmen Sie die zugehörige Entscheidungsregel.

**c** Angenommen, der beschriebene Test wird auf der Grundlage einer Stichprobe von 250 CDs durchgeführt. In diesem Fall wird die Nullhypothese abgelehnt, wenn mindestens 18 Hüllen fehlerhaft sind. Ermitteln Sie den Bereich, in dem der tatsächliche Anteil fehlerhafter Hüllen liegen müsste, damit die Wahrscheinlichkeit für den Fehler zweiter Art kleiner als 25 % ist.

**3** Bei der Jubiläumsfeier können die CDs sowohl zu einem Preis von 9 Euro pro Stück gekauft als auch bei einem Spiel gewonnen werden. Für das Spiel wird ein Glücksrad mit einem grauen und einem weißen Sektor verwendet (vgl. Abbildung). Für einen Einsatz von einem Euro wird das Glücksrad dreimal gedreht. Nur wenn dabei genau zweimal der grau markierte Sektor getroffen wird, erhält man eine CD. Die Größe des Öffnungswinkels des grauen Sektors im Bogenmaß wird mit  $b$  bezeichnet.



**a** Zeigen Sie, dass die Wahrscheinlichkeit dafür, bei diesem Spiel eine CD zu gewinnen, mithilfe des Terms  $\frac{3}{4\pi^2}b^2 - \frac{3}{8\pi^3}b^3$  berechnet werden kann.

**b** Es gibt Werte von  $b$ , für die die Bigband bei vielfacher Durchführung des Spiels im Mittel pro CD die gleichen Einnahmen erwarten könnte wie beim Verkauf der CD. Ermitteln Sie diese Werte von  $b$ .

25

## 2 Erwartungshorizont

Der Erwartungshorizont stellt für jede Teilaufgabe eine mögliche Lösung dar. Nicht dargestellte korrekte Lösungen sind als gleichwertig zu akzeptieren.

		BE
<b>1 a</b>	$\frac{9}{10} \cdot \frac{8}{10} = 72\%$	2
<b>b</b>	X: Anzahl der gespielten langen Stücke $P_{0,6}^{12}(X = 5) \approx 10,1\%$ $P_{0,6}^{12}(X > 6) \approx 66,5\%$	4
<b>2 a</b>	Es soll vermieden werden, dass ein Preisnachlass verlangt wird, obwohl der Anteil der fehlerhaften Hüllen kleiner als 5 % ist.  Begründung: Durch die gewählte Nullhypothese wird das Risiko für den Fehler, der vermieden werden soll, begrenzt.	3

	<b>b</b>	Y: Anzahl der CDs mit fehlerhaften Hüllen $P_{0,05}^{150}(Y \geq k) \leq 0,1 \Leftrightarrow k \geq 12$ Damit: Sind mindestens zwölf Hüllen fehlerhaft, wird ein Preisnachlass verlangt.	5
	<b>c</b>	$P_{0,081}^{250}(Y \leq 17) \approx 0,26$ $P_{0,082}^{250}(Y \leq 17) \approx 0,24997$ Da die Wahrscheinlichkeit für den Fehler zweiter Art mit steigendem Anteil fehlerhafter Hüllen abnimmt, ergibt sich für den gesuchten Bereich näherungsweise $[0,082;1]$ .	4
<b>3</b>	<b>a</b>	$\binom{3}{2} \cdot \left(\frac{b}{2\pi}\right)^2 \cdot \left(1 - \frac{b}{2\pi}\right) = \frac{3}{4\pi^2} b^2 - \frac{3}{8\pi^3} b^3$	3
	<b>b</b>	Für $0 \leq b \leq 2\pi$ liefert $\frac{3}{4\pi^2} b^2 - \frac{3}{8\pi^3} b^3 = \frac{1}{9}$ : $b_1 \approx 1,37$ und $b_2 \approx 6,03$	4
			25

### 3 Standardbezug

Teilaufgabe	BE	allgemeine mathematische Kompetenzen						Anforderungsbereich		
		K1	K2	K3	K4	K5	K6	I	II	III
<b>1 a</b>	2		I	I		I		X		
<b>b</b>	4			I		I		X		
<b>2 a</b>	3	III		III			II			X
<b>b</b>	5	II	II	II		II			X	
<b>c</b>	4	III	III	III		II	II			X
<b>3 a</b>	3		II	II		II	I		X	
<b>b</b>	4		II	II		II			X	

### 4 Bewertungshinweise

Die Bewertung der erbrachten Prüfungsleistungen hat sich für jede Teilaufgabe nach der am rechten Rand der Aufgabenstellung angegebenen Anzahl maximal erreichbarer Bewertungseinheiten (BE) zu richten.

Für die Bewertung der Gesamtleistung eines Prüflings ist ein Bewertungsraster<sup>2</sup> vorgesehen, das angibt, wie die in den Prüfungsteilen A und B insgesamt erreichten Bewertungseinheiten in Notenpunkte umgesetzt werden.

<sup>2</sup> Das Bewertungsraster ist Teil des Dokuments „Beschreibung der Struktur“, das auf den Internetseiten des IQB zum Download bereitsteht.