Gemeinsame Abituraufgabenpools der Länder

Pool für das Jahr 2020

Aufgaben für das Fach Mathematik

Kurzbeschreibung

Anforderungsniveau	Prüfungsteil	Sachgebiet[1]	digitales Hilfsmittel
erhöht	B	Analysis	WTR

1 Aufgabe

BE

Gegeben ist die Schar der in $\mathbb{R}$ definierten Funktionen $f_k : x \mapsto e^{kx} - x - 1$ mit $k \in \mathbb{R}$.
Der Graph von f_k wird mit G_k bezeichnet.

1 Betrachtet wird zunächst die Funktion f_{10} mit $f_{10}(x) = e^{10x} - x - 1$.

a Die Abbildung 1 zeigt G_{10}. Im dargestellten Bereich gibt es zwei Rechtecke, die jeweils die beiden folgenden Eigenschaften haben: 3

- Zwei Eckpunkte liegen auf der x-Achse und zwei Eckpunkte auf G_{10}.
- Eine Seitenlänge beträgt 0,4.

Zeichnen Sie diese beiden Rechtecke in die Abbildung 1 ein. Begründen Sie ohne zu rechnen, dass die beiden Rechtecke unterschiedliche Flächeninhalte haben.

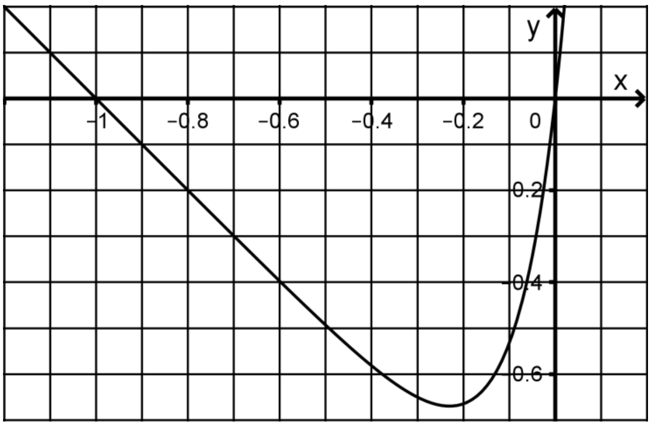


Abb. 1

[1] verwendete Abkürzungen: AG/LA (A1) - Analytische Geometrie/Lineare Algebra (Alternative A1), AG/LA (A2) - Analytische Geometrie/Lineare Algebra (Alternative A2)

b Begründen Sie, dass G_{10} und die Gerade mit der Gleichung $y = -x - 1$ keinen Punkt gemeinsam haben. Beschreiben Sie sowohl für $x \to -\infty$ als auch für $x \to +\infty$ den Verlauf von G_{10} bezüglich dieser Gerade. | 3

c Berechnen Sie den Wert des Terms $\int_{-1}^{0} f_{10}(x)\,dx$. | 3

d Betrachtet wird der Inhalt der Fläche, die G_{10} mit der x-Achse und der Gerade mit der Gleichung $x = -1$ einschließt. Begründen Sie, dass dieser Inhalt geringfügig größer ist als der Wert des Terms $\left|\int_{-1}^{0} f_{10}(x)\,dx\right|$, ohne den Inhalt zu berechnen. | 3

2 Betrachtet wird nun die gesamte Schar der Funktionen f_k.

a Zeigen Sie, dass alle Graphen der Schar genau einen Punkt gemeinsam haben, und bestimmen Sie dessen Koordinaten. | 3

b Die Abbildung 2 zeigt vier Graphen der Schar, darunter diejenigen zu den Werten $k = -1$, $k = 0$ und $k = 1$. Nehmen Sie die passende Zuordnung vor. | 3

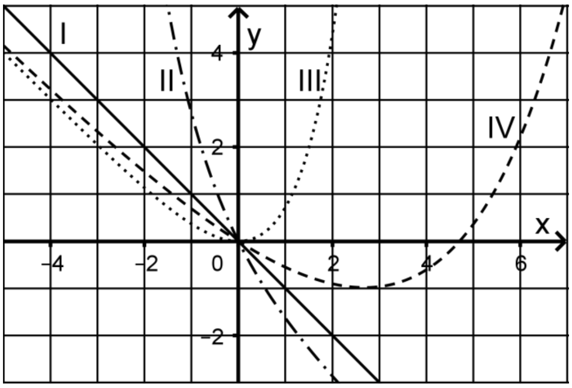


Abb. 2

Für die erste Ableitungsfunktion von f_k gilt $f_k'(x) = k \cdot e^{kx} - 1$.

c Beim Ableiten von f_k wurde die folgende Regel angewendet: | 3

Betrachtet man differenzierbare Funktionen u, v und w mit $w(x) = v(u(x))$, so hat die erste Ableitungsfunktion von w den Term $w'(x) = v'(u(x)) \cdot u'(x)$.

Stellen Sie den Zusammenhang zwischen dem Ableiten von f_k und dieser Regel her, indem Sie für u, v und w jeweils einen passenden Funktionsterm angeben.

d Weisen Sie nach, dass alle Graphen G_k weder Hochpunkte noch Wendepunkte haben. | 5

Für positive Werte von k hat G_k den Tiefpunkt $T_k\left(-\frac{\ln k}{k} \,\middle|\, \frac{\ln k}{k} - 1 + \frac{1}{k}\right)$.

e Ermitteln Sie den Abstand von T_k zur Gerade mit der Gleichung $y = -x - 1$. | 5

f Für $k \to +\infty$ nähert sich T_k einem Punkt A. Bestimmen Sie die Koordinaten von A. | 2

g Berechnen Sie denjenigen Wert von k, für den G_k im Koordinatenursprung einen Steigungswinkel der Größe 60° hat. | 2

h Betrachtet wird die folgende Behauptung: | 5

Zu zwei beliebigen verschiedenen Graphen G_{k_1} und G_{k_2} gibt es einen Wert von x, für den die beiden Graphen die gleiche Steigung haben.

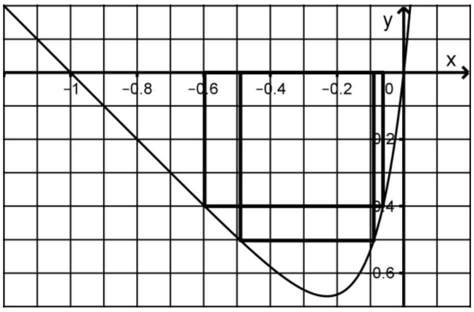
Unter der Voraussetzung, dass k_1 und k_2 positiv sind, ist die Behauptung richtig;

bestimmen Sie den zugehörigen Wert von x. Entscheiden Sie, ob die Behauptung auch dann richtig sein kann, wenn entweder k_1 oder k_2 nicht positiv ist, und begründen Sie Ihre Entscheidung.

40

2 Erwartungshorizont

Der Erwartungshorizont stellt für jede Teilaufgabe eine mögliche Lösung dar. Nicht dargestellte korrekte Lösungen sind als gleichwertig zu akzeptieren.

			BE
1	**a**	 Die beiden Rechtecke stimmen nur in einer der beiden Seitenlängen überein.	3
	b	$f_{10}(x)-(-x-1)=e^{kx}>0$ für alle $x\in\mathbb{R}$ Für $x\to-\infty$ kommt G_{10} der Gerade beliebig nahe, für $x\to+\infty$ entfernt sich G_{10} beliebig weit von der Gerade.	3
	c	$\int\limits_{-1}^{0} f_{10}(x)\,dx=\left[\frac{1}{10}e^{10x}-\frac{1}{2}x^2-x\right]_{-1}^{0}=\frac{1}{10}-\frac{1}{10}e^{-10}+\frac{1}{2}-1=-\frac{1}{10}e^{-10}-\frac{2}{5}$	3
	d	$f_{10}(-1)>0$, d. h. G_{10} schneidet für einen Wert von x mit $-1<x<0$ die x-Achse. Der Term gibt die Differenz der Inhalte der beiden Teile der beschriebenen Fläche an, die unterhalb bzw. oberhalb der x-Achse liegen. Damit ist der Inhalt der beschriebenen Fläche größer als der Wert des gegebenen Terms, unterscheidet sich von diesem Wert aber nur geringfügig, da der oberhalb der x-Achse liegende Teil der Fläche viel kleiner ist als der unterhalb liegende Teil.	3
2	**a**	Für $k_1\neq k_2$ gilt: $f_{k_1}(x)=f_{k_2}(x)\Leftrightarrow e^{k_1x}=e^{k_2x}\Leftrightarrow x=0$ $y=f_k(0)=0$	3
	b	I: $k=0$, II: $k=-1$, III: $k=1$	3
	c	$u(x)=kx$, $v(x)=e^x$, $w(x)=e^{kx}$	3
	d	$f_k''(x)=k^2\cdot e^{kx}$ Für $k=0$ gilt $f_0(x)=-x$. G_0 hat als Gerade weder einen Hochpunkt noch einen Wendepunkt. Für $k\neq0$ gilt $f_k''(x)>0$ für alle $x\in\mathbb{R}$, d. h. G_k ist durchgehend linksgekrümmt und hat damit weder einen Hochpunkt noch einen Wendepunkt.	5

e	Die Gerade hat die Steigung -1. Damit stimmen die in x- und y-Richtung gemessenen Entfernungen von T_k zur Gerade überein und betragen jeweils $\frac{\ln k}{k}-1+\frac{1}{k}-\left(\frac{\ln k}{k}-1\right)=\frac{1}{k}$. Der gesuchte Abstand a ist also die Hälfte der Länge der Diagonale eines Quadrats mit der Seitenlänge $\frac{1}{k}$. Damit gilt $(2a)^2=2\cdot\left(\frac{1}{k}\right)^2 \Leftrightarrow a=\sqrt{\frac{1}{2k^2}}$.	5
f	Mit $\lim\limits_{k\to+\infty}\frac{\ln k}{k}=0$ und $\lim\limits_{k\to+\infty}\frac{1}{k}=0$ ergibt sich $A(0\,\vert\,-1)$.	2
g	$f_k'(0)=\tan 60° \Leftrightarrow k-1=\sqrt{3} \Leftrightarrow k=1+\sqrt{3}$	2
h	Für $k_1,k_2>0$ mit $k_1\neq k_2$ gilt: $f_{k_1}'(x)=f_{k_2}'(x) \Leftrightarrow k_1\cdot e^{k_1x}=k_2\cdot e^{k_2x} \Leftrightarrow e^{(k_1-k_2)\cdot x}=\frac{k_2}{k_1} \Leftrightarrow x=\frac{1}{k_1-k_2}\cdot\ln\frac{k_2}{k_1}$ Es gilt $e^{kx}>0$ für alle $x\in\mathbb{R}$. Damit hat die Gleichung $k_1\cdot e^{k_1x}=k_2\cdot e^{k_2x}$ keine Lösung, wenn entweder k_1 oder k_2 nicht positiv ist. In diesem Fall kann die Behauptung also nicht richtig sein.	5
		40

3 Standardbezug

Teilaufgabe	BE	allgemeine mathematische Kompetenzen						Anforderungsbereich		
		K1	K2	K3	K4	K5	K6	I	II	III
1 a	3	I			I			X		
b	3	II				II	II		X	
c	3					I		X		
d	3	III	II		II		III			X
2 a	3					II			X	
b	3	II			I	I			X	
c	3	II			II		II		X	
d	5	II	II			II			X	
e	5		III			II				X
f	2	I	I			I		X		
g	2		II			II			X	
h	5	III	III			II	II			X

4 Bewertungshinweise

Die Bewertung der erbrachten Prüfungsleistungen hat sich für jede Teilaufgabe nach der am rechten Rand der Aufgabenstellung angegebenen Anzahl maximal erreichbarer Bewertungseinheiten (BE) zu richten.

Für die Bewertung der Gesamtleistung eines Prüflings ist ein Bewertungsraster[2] vorgesehen, das angibt, wie die in den Prüfungsteilen A und B insgesamt erreichten Bewertungseinheiten in Notenpunkte umgesetzt werden.

[2] Das Bewertungsraster ist Teil des Dokuments „Beschreibung der Struktur“, das auf den Internetseiten des IQB zum Download bereitsteht.