Institut zur Qualitätsentwicklung im Bildungswesen

KULTUSMINISTER KONFERENZ

Gemeinsame Abituraufgabenpools der Länder

Pool für das Jahr 2020

Aufgaben für das Fach Mathematik

Kurzbeschreibung

Anforderungsniveau	Prüfungsteil	Sachgebiet[1]	digitales Hilfsmittel
erhöht	B	Analysis	WTR

1 Aufgabe

	BE
1 Gegeben ist die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion $f: x \mapsto -\frac{8}{27}x^3 + \frac{2}{3}x^2$, die die Nullstellen 0 und $\frac{9}{4}$ hat. Der Graph von f wird mit G_f bezeichnet.	
a Bestimmen Sie Lage und Art der Extrempunkte von G_f. Skizzieren Sie G_f unter Berücksichtigung der bisherigen Informationen sowie des Funktionswerts für $x = -2$ in einem geeigneten Koordinatensystem.	7
b Die Tangente an G_f im Punkt $\left(\frac{9}{4} \mid 0\right)$ wird mit t bezeichnet. Weisen Sie nach, dass t durch den Punkt $\left(0 \mid \frac{27}{8}\right)$ verläuft. Begründen Sie, dass der Inhalt des Flächenstücks, das G_f im ersten Quadranten mit t und der y-Achse einschließt, kleiner als $\frac{1}{2} \cdot \frac{9}{4} \cdot \frac{27}{8}$ ist.	5
2 Der Graph einer in $[0;3]$ definierten ganzrationalen Funktion g geht im Punkt $A(0 \mid 1{,}5)$ ohne Knick in die Gerade mit der Gleichung $y = 1{,}5$ über und im Punkt $B(3 \mid -0{,}5)$ ohne Knick in die Gerade mit der Gleichung $y = -4x + 11{,}5$.	
a Zeigen Sie rechnerisch, dass der Grad von g unter den beschriebenen Bedingungen nicht zwei sein kann.	6

[1] verwendete Abkürzungen: AG/LA (A1) - Analytische Geometrie/Lineare Algebra (Alternative A1), AG/LA (A2) - Analytische Geometrie/Lineare Algebra (Alternative A2)

b Die Abbildung 1 zeigt den Graphen von g. Beschreiben Sie ein Verfahren, mit dem der Abstand des Punkts $M(1{,}5\,|\,1)$ zum Graphen von g berechnet werden könnte, wenn der Funktionsterm von g bekannt wäre. 5

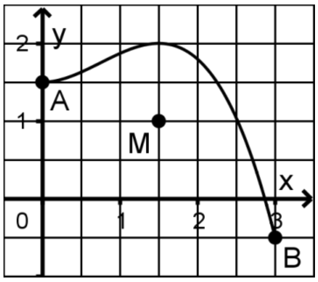


Abb. 1

3 In einer Messstation wird seit 1958 kontinuierlich die CO_2-Konzentration in der Luft gemessen, die in ppm (parts per million) angegeben wird. Die Tabelle gibt für die Jahre 1960, 1985 und 2010 jeweils den jährlichen Durchschnittswert der Messwerte an.

Jahr	1960	1985	2010
CO_2-Konzentration	317 ppm	346 ppm	390 ppm

a Die jährlichen Durchschnittswerte haben sich im Zeitraum von 1960 bis 1985 in guter Näherung exponentiell entwickelt. Ermitteln Sie die zugehörige jährliche Wachstumsrate in Prozent. 3

(zur Kontrolle: etwa 0,35 %)

b Berechnen Sie unter der Annahme, dass sich das exponentielle Wachstum nach 1985 in gleicher Weise fortgesetzt hat, den jährlichen Durchschnittswert für das Jahr 2010. Vergleichen Sie diesen Wert mit dem zugehörigen Wert aus der Tabelle und formulieren Sie das Ergebnis Ihres Vergleichs im Sachzusammenhang. 3

Innerhalb eines Jahres schwankt die CO_2-Konzentration. Für einen bestimmten Zeitraum von acht Monaten lassen sich die gemessenen Werte modellhaft durch die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion $k: x \mapsto 3{,}3 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{6}x\right) + 406$ beschreiben. Dabei ist x die in diesem Zeitraum vergangene Zeit in Monaten und $k(x)$ die CO_2-Konzentration in ppm. Vereinfachend wird davon ausgegangen, dass jeder Monat 30 Tage hat.

c Geben Sie an, wie der Graph von k schrittweise aus dem Graphen der in $\mathbb{R}$ definierten Funktion $s: x \mapsto \sin(x)$ hervorgeht. Beurteilen Sie, ob die Reihenfolge der einzelnen Schritte von Bedeutung ist. 5

d Der durchschnittliche Funktionswert einer Funktion h im Intervall $[a;b]$ kann mithilfe der folgenden Überlegung bestimmt werden: 6

Schließt der Graph von h mit der x-Achse und den Geraden mit den Gleichungen $x = a$ und $x = b$ ein Flächenstück ein, so gibt es ein Rechteck der Länge $b - a$, das den gleichen Flächeninhalt wie das Flächenstück hat (vgl. Abbildung 2). Die Breite dieses Rechtecks stimmt mit dem Betrag des durchschnittlichen Funktionswerts von h im Intervall $[a;b]$ überein.

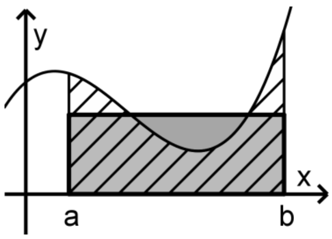


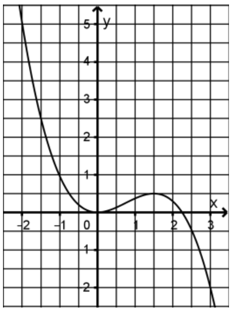
Abb. 2

Bestimmen Sie für den betrachteten Zeitraum von acht Monaten die prozentuale Abweichung des Maximums der CO_2-Konzentration von der durchschnittlichen CO_2-Konzentration.

40

2 Erwartungshorizont

Der Erwartungshorizont stellt für jede Teilaufgabe eine mögliche Lösung dar. Nicht dargestellte korrekte Lösungen sind als gleichwertig zu akzeptieren.

			BE
1	**a**	$f'(x)=-\frac{8}{9}x^2+\frac{4}{3}x$, $f''(x)=-\frac{16}{9}x+\frac{4}{3}$ $f'(x)=0 \Leftrightarrow x\cdot\left(-\frac{8}{9}x+\frac{4}{3}\right)=0 \Leftrightarrow x=0 \vee x=\frac{3}{2}$ $f''(0)=\frac{4}{3}>0$, $f''\left(\frac{3}{2}\right)=-\frac{4}{3}<0$ Damit hat G_f den Tiefpunkt $(0\mid 0)$ und den Hochpunkt $\left(\frac{3}{2}\mid\frac{1}{2}\right)$. $f(-2)\approx 5{,}0$ 	7
	b	$f'\left(\frac{9}{4}\right)=-\frac{3}{2}$, $-\frac{3}{2}\cdot\frac{9}{4}+\frac{27}{8}=0$ Der angegebene Term gibt den Flächeninhalt des Dreiecks an, das die Koordinatenachsen mit der Tangente einschließen. Für $0<x<\frac{9}{4}$ verläuft G_f innerhalb dieses Dreiecks.	5
2	**a**	Aus den beschriebenen Bedingungen ergibt sich: I: $g(0)=1{,}5$; II: $g'(0)=0$; III: $g(3)=-0{,}5$; IV: $g'(3)=-4$ Mit $g(x)=ax^2+bx+c$ ergibt sich aus II $b=0$, aus I $c=1{,}5$ und damit aus III $a=-\frac{2}{9}$. Daraus folgt $g'(3)=-\frac{4}{3}$ im Widerspruch zu IV.	6
	b	Die Entfernungen von M zu den Punkten $(x\mid g(x))$ können in Abhängigkeit von x mithilfe der Funktion d mit $d(x)=\sqrt{(x-1{,}5)^2+(g(x)-1)^2}$ bestimmt werden. Der Abbildung ist zu entnehmen, dass sich die kleinste dieser Entfernungen nicht für einen der Punkte A und B ergibt. Berechnet man für die Lösungen der Gleichung $d'(x)=0$ mit $x\in\,]0;3[$ die zugehörigen Funktionswerte von d, so entspricht der kleinste dieser Werte dem gesuchten Abstand.	5
3	**a**	$317\cdot p^{25}=346$ liefert $p=\sqrt[25]{\frac{346}{317}}\approx 1{,}0035$, d. h. die jährliche Wachstumsrate beträgt etwa 0,35 %.	3
	b	$346\cdot 1{,}0035^{25}\approx 378<390$ Der Durchschnittswert der CO_2-Konzentration für das Jahr 2010 ist größer als der, der sich bei einer unveränderten Fortsetzung des exponentiellen Wachstums ergeben hätte.	3
	c	Der Graph von k geht aus dem Graphen von s hervor durch 1. Streckung in x-Richtung mit dem Faktor $\frac{6}{\pi}$ 2. Streckung in y-Richtung mit dem Faktor 3,3 3. Verschiebung um 406 in positive y-Richtung Die Reihenfolge der Schritte ist von Bedeutung. Würde man die Verschiebung in y-Richtung vor der Streckung in y-Richtung durchführen, so hätten die Punkte des	5

	entstehenden Graphen deutlich größere y-Koordinaten als die des Graphen von k.	
d	$\frac{1}{8}\cdot\int\limits_0^8 k(x)\,dx=\frac{1}{8}\cdot\left[-\frac{3{,}3\cdot 6}{\pi}\cdot\cos\left(\frac{\pi}{6}x\right)+406x\right]_0^8\approx 407{,}2$ $\frac{k(3)-407{,}2}{407{,}2}=\frac{409{,}3-407{,}2}{407{,}2}\approx 0{,}5\,\%$	6
		40

3 Standardbezug

Teilaufgabe	BE	allgemeine mathematische Kompetenzen						Anforderungsbereich		
		K1	K2	K3	K4	K5	K6	I	II	III
1 a	7	I			I	I		X		
b	5	II	II		I	I	II		X	
2 a	6	II	II			II	I		X	
b	5	III	III				III			X
3 a	3		II	II		I			X	
b	3			I		I	I	X		
c	5	II			II		II		X	
d	6			II	II	II	III			X

4 Bewertungshinweise

Die Bewertung der erbrachten Prüfungsleistungen hat sich für jede Teilaufgabe nach der am rechten Rand der Aufgabenstellung angegebenen Anzahl maximal erreichbarer Bewertungseinheiten (BE) zu richten.

Für die Bewertung der Gesamtleistung eines Prüflings ist ein Bewertungsraster[2] vorgesehen, das angibt, wie die in den Prüfungsteilen A und B insgesamt erreichten Bewertungseinheiten in Notenpunkte umgesetzt werden.

[2] Das Bewertungsraster ist Teil des Dokuments „Beschreibung der Struktur", das auf den Internetseiten des IQB zum Download bereitsteht.