

Gemeinsame Abituraufgabenpools der Länder

Pool für das Jahr 2020

Aufgaben für das Fach Mathematik

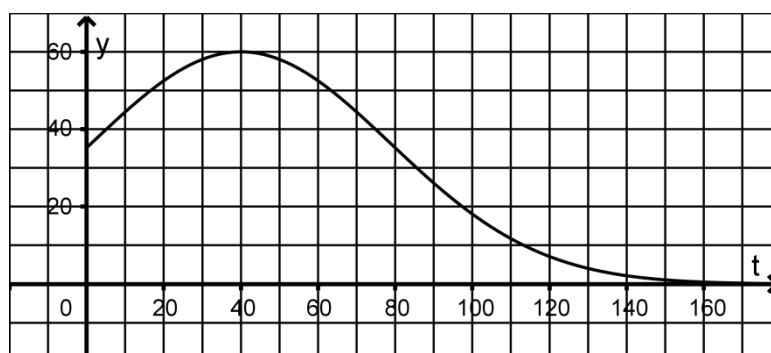
Kurzbeschreibung

Anforderungsniveau	Prüfungsteil	Sachgebiet ¹	digitales Hilfsmittel
erhöht	B	Analysis	CAS

1 Aufgabe

Im Oktober des Jahres 2000 wurden auf einer Waldfläche Fichten gepflanzt. Alle Fichten hatten zum Zeitpunkt der Pflanzung eine Höhe von 50 cm.

- 1 Betrachtet wird die Rate des Höhenwachstums der Fichten in Abhängigkeit von der Zeit. Diese Wachstumsrate wird für $t \geq 0$ modellhaft durch die in \mathbb{R} definierte Funktion w mit $w(t) = 60 \cdot e^{-\frac{1}{3000}(t-40)^2}$ beschrieben. Dabei ist t die seit der Pflanzung vergangene Zeit in Jahren und $w(t)$ die Wachstumsrate in Zentimeter pro Jahr ($\frac{\text{cm}}{\text{a}}$). Die Abbildung zeigt den Graphen von w für $t \geq 0$.



- a Bestätigen Sie rechnerisch, dass die Wachstumsrate im Jahr 2040 am größten ist. Bestimmen Sie rechnerisch den Zeitraum in Jahren, in dem die Fichten mehr als $50 \frac{\text{cm}}{\text{a}}$ wachsen.

BE

4

¹ verwendete Abkürzungen: AG/LA (A1) - Analytische Geometrie/Lineare Algebra (Alternative A1), AG/LA (A2) - Analytische Geometrie/Lineare Algebra (Alternative A2)

b Begründen Sie die folgende Aussage: 2

Innerhalb der ersten 80 Jahre nach der Pflanzung sind für zwei beliebige Zeitpunkte, die den gleichen zeitlichen Abstand vom Oktober des Jahres 2040 haben, die zugehörigen Wachstumsraten gleich groß.

c Zu einer bestimmten Wachstumsrate ist der Zeitraum, in dem diese Wachstumsrate nicht unterschritten wird, genau 30 Jahre lang. Geben Sie diesen Zeitraum an und bestimmen Sie den Wert der Wachstumsrate. Veranschaulichen Sie Ihr Ergebnis in der Abbildung. 4

d Geben Sie die Bedeutung des Terms $\frac{1}{100} \cdot \left(50 + \int_0^{60} w(t) dt \right)$ im Sachzusammenhang 5

an und begründen Sie Ihre Angabe. Skizzieren Sie die Höhe der Fichten in Abhängigkeit von der Zeit beginnend mit dem Zeitpunkt der Pflanzung bis zum Jahr 2180.

2 In einem anderen Modell wird die Höhe der Fichten in Abhängigkeit von der Zeit mithilfe der in \mathbb{R} definierten Funktion $h: t \mapsto 50 \cdot \frac{e^{\frac{1}{10}t}}{e^{\frac{1}{10}t} + 99}$ beschrieben. Dabei ist t die seit der Pflanzung vergangene Zeit in Jahren und $h(t)$ die Höhe in Metern. Der Graph von h ist punktsymmetrisch bezüglich seines Wendepunkts W .

a Bestimmen Sie die Koordinaten von W . 2

(zur Kontrolle: $W(10 \cdot \ln 99 \mid 25)$)

b Eine Zeitschrift aus dem Jahr 1911 enthält folgenden Textabschnitt: 3

Von unseren einheimischen Bäumen steht die Fichte hinsichtlich ihres Höhenwachstums obenan, und zwar mit 37 Zentimeter durchschnittlich im Jahre. Doch sind von Forstbeamten Ausnahmen beobachtet worden, in denen Fichten in einem Jahre bis zu 150 Zentimeter ihrer Länge zusetzten.

(Quelle: Walther Kabel: Wachstumsgeschwindigkeit bei Pflanzen. In: Das Buch für Alle. Jahrgang 1911, Heft 1, Union Deutsche Verlagsgesellschaft. Stuttgart 1911, S. 23.)

Stellen Sie die durch die Funktion h bestimmte maximale Wachstumsgeschwindigkeit in einen Zusammenhang mit den Angaben dieses Textabschnitts.

c Das Höhenwachstum der Fichten kann für den Zeitraum von Oktober 2040 bis Oktober 2050 näherungsweise durch die Tangente an den Graphen von h im Punkt W beschrieben werden. Berechnen Sie die maximale prozentuale Abweichung im Vergleich zur Beschreibung mithilfe von h . 4

d Im betrachteten Modell lässt sich die zeitliche Entwicklung der Höhe der Fichten für die ersten 20 Jahre ab der Pflanzung näherungsweise durch die Funktion n_1 mit $n_1(t) = \frac{1}{2} \cdot e^{\frac{1}{10}t}$ beschreiben. Gegeben sind zudem die folgenden Funktionsterme: 6

$$n_2(t) = n_1(t + 10 \cdot \ln 99) - 25$$

$$n_3(t) = -n_2(-t)$$

$$n_4(t) = n_3(t - 10 \cdot \ln 99) + 25$$

Begründen Sie, dass der Graph von n_4 zum Graphen von n_1 bezüglich des Punkts W symmetrisch ist. Geben Sie die Bedeutung von n_4 im Sachzusammen-

hang an und begründen Sie Ihre Angabe.

3 Um den Verkaufswert eines Baumstamms zu bestimmen, wird dessen Durchmesser in einer Höhe von 1,3 m verwendet. Dieser Durchmesser wird als Brusthöhendurchmesser (BHD) bezeichnet.

a Ein Fichtenstamm hat einen BHD von 40 cm. Sein Volumen vom Boden bis zu einer Höhe von 1,3 m beträgt $0,17\text{ m}^3$. Es soll davon ausgegangen werden, dass der Durchmesser des Stamms mit zunehmender Höhe linear abnimmt. Berechnen Sie den Durchmesser des Stamms in einer Höhe von 15 m.

b Für BHD ab 10 cm kann der Verkaufspreis von Fichtenstämmen in Abhängigkeit vom BHD näherungsweise mithilfe einer quadratischen Funktion bestimmt werden. Der Tabelle kann für drei BHD der jeweilige Preis entnommen werden. Ermitteln Sie den Preis für einen Fichtenstamm mit einem BHD von 80 cm.

BHD	Preis
10 cm	0 €
40 cm	100 €
60 cm	250 €

6

4

40

2 Erwartungshorizont

Der Erwartungshorizont stellt für jede Teilaufgabe eine mögliche Lösung dar. Nicht dargestellte korrekte Lösungen sind als gleichwertig zu akzeptieren.

		BE
1 a	Für $t \geq 0$ gilt: $w'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 40$, $w''(40) < 0$ Für $t \geq 0$ liefert $w(t) > 50$ näherungsweise $16,6 < t < 63,4$, d. h. den Zeitraum von 2017 bis einschließlich 2064.	4
b	Für alle $a \in \mathbb{R}$ gilt $w(40 - a) = w(40 + a)$.	2
c	Zeitraum: Oktober 2025 bis einschließlich Oktober 2055 $w(25) \approx 56$, d. h. die Wachstumsrate beträgt etwa $56 \frac{\text{cm}}{\text{a}}$.	4



	<p>d Der Term gibt die Höhe der Fichten im Oktober 2060 in Metern an.</p> <p>Begründung: 50 ist die Anfangshöhe in Zentimetern, der Wert des Integrals die Änderung der Höhe innerhalb der ersten 60 Jahre nach dem Pflanzen in Zentimetern. Der Faktor $\frac{1}{100}$ führt zu einem Wert in Metern.</p>		5
2 a	$h''(t) = 0 \Leftrightarrow t = 10 \cdot \ln 99$, $h(10 \cdot \ln 99) = 25$	2	
b	Es gilt $h'(10 \cdot \ln 99) = 1,25$. Die maximale Wachstumsgeschwindigkeit beträgt $125 \frac{\text{cm}}{\text{a}}$, ist im Sinne des Texts also als Ausnahmefall zu betrachten.	3	
c	Die Tangente wird durch die Funktion g mit $g(t) = \frac{5}{4}t + 25 - \frac{25}{2} \cdot \ln 99$ dargestellt. Das Maximum der Funktion d mit $d(t) = \frac{ h(t)-g(t) }{h(t)}$ beträgt für $40 \leq t \leq 50$ etwa 1,2%.	4	
d	Der Graph von n_2 ist gegenüber dem Graphen von n_1 mit \overline{WO} verschoben. Der Graph von n_3 ist zum Graphen von n_2 symmetrisch bezüglich O . Der Graph von n_4 ist gegenüber dem Graphen von n_3 mit \overline{OW} verschoben. Der Graph von n_4 ist also zum Graphen von n_1 symmetrisch bezüglich W . Der Graph von h ist symmetrisch bezüglich W und es gilt $10 \cdot \ln 99 + (10 \cdot \ln 99 - 20) \approx 72$. Damit beschreibt n_4 im Modell näherungsweise die zeitliche Entwicklung der Höhe der Fichten für den Zeitraum von etwa 72 bis etwa 92 Jahre nach der Pflanzung.	6	
3 a	Der Stamm lässt sich durch einen Körper darstellen, der durch Rotation des Graphen einer Funktion s um die x -Achse entsteht. Der Term von s hat die Form $s(x) = m \cdot (x - 1,3) + 0,2$. Mit der Lösung der Gleichung $\pi \cdot \int_0^{1,3} (s(x))^2 dx = 0,17$ für $m < 0$ ergibt sich $2 \cdot s(15) \approx 0,23$, der Durchmesser in einer Höhe von 15 m beträgt also etwa 23 cm.	6	
b	$p(x) = ax^2 + bx + c \wedge p(10) = 0 \wedge p(40) = 100 \wedge p(60) = 250$ liefert $a = \frac{1}{12}$, $b = -\frac{5}{6}$ und $c = 0$. Damit: $p(80) \approx 470$, d. h. der Preis beträgt etwa 470 €.	4	
		40	

3 Standardbezug

Teilaufgabe	BE	allgemeine mathematische Kompetenzen						Anforderungsbereich		
		K1	K2	K3	K4	K5	K6	I	II	III
1 a	4			I		I		X		
b	2	I		I	I		I	X		

c	4		II	I	I	I			X	
d	5	II		II	II		I		X	
2 a	2	I				I		X		
b	3			II		I	I		X	
c	4		II	II		II	II		X	
d	6	III	III	III	II		II			X
3 a	6		III	III		II	II			X
b	4		I	II	I	II			X	

4 Bewertungshinweise

Die Bewertung der erbrachten Prüfungsleistungen hat sich für jede Teilaufgabe nach der am rechten Rand der Aufgabenstellung angegebenen Anzahl maximal erreichbarer Bewertungseinheiten (BE) zu richten.

Für die Bewertung der Gesamtleistung eines Prüflings ist ein Bewertungsraster² vorgesehen, das angibt, wie die in den Prüfungsteilen A und B insgesamt erreichten Bewertungseinheiten in Notenpunkte umgesetzt werden.

² Das Bewertungsraster ist Teil des Dokuments „Beschreibung der Struktur“, das auf den Internetseiten des IQB zum Download bereitsteht.