

Gemeinsame Abituraufgabenpools der Länder

## Pool für das Jahr 2020

Aufgaben für das Fach Mathematik

### Kurzbeschreibung

Anforderungsniveau	Prüfungsteil	Sachgebiet <sup>1</sup>	digitales Hilfsmittel
erhöht	B	Analysis	CAS

### 1 Aufgabe

1 Gegeben ist die Schar der in  $\mathbb{R}$  definierten Funktionen  $v_t$  mit

$$v_t(x) = \left(\frac{x}{t}\right)^2 \cdot (x-t)^2 + 1 \text{ und } t \in \mathbb{R}^+.$$

a Nennen Sie drei Eigenschaften, die alle Graphen der Schar gemeinsam haben. 3

b Bestimmen Sie rechnerisch die Koordinaten des Hochpunkts des Graphen von  $v_8$ . 2

c Das Gleichungssystem 4

$$\text{I } v_8(x) = m \cdot x + 1 \qquad \text{II } v'_8(x) = m$$

hat unter anderem die beiden Lösungen  $x_1 = \frac{8}{3}$  und  $m_1 = \frac{32}{27}$  sowie  $x_2 = 8$  und  $m_2 = 0$ . Beschreiben Sie die Bedeutung dieser Lösungen für den Graphen von  $v_8$  unter Berücksichtigung beider Gleichungen.

d Zeigen Sie, dass der Graph von  $v_t$  genau zwei Wendepunkte hat, deren y-Koordinaten den Wert  $\frac{1}{36}t^2 + 1$  haben. 3

e Der Wendepunkt des Graphen von  $v_t$  mit der kleineren x-Koordinate sowie die Punkte  $P\left(\frac{t}{2} \mid 0\right)$  und  $Q\left(\frac{t}{2} \mid v_t\left(\frac{t}{2}\right)\right)$  sind die Eckpunkte eines Dreiecks. Untersuchen Sie, ob es einen Wert von  $t$  gibt, für den dieses Dreieck rechtwinklig ist. 4

<sup>1</sup> verwendete Abkürzungen: AG/LA (A1) - Analytische Geometrie/Lineare Algebra (Alternative A1),  
AG/LA (A2) - Analytische Geometrie/Lineare Algebra (Alternative A2)

Betrachtet wird die in  $\mathbb{R}$  definierte Funktion  $f$  mit  $f(x) = \sqrt[4]{v_8(x)}$ .

**f** Beurteilen Sie jede der folgenden Aussagen:

- ◆ Für keinen Wert von  $x$  ist der Funktionswert von  $f$  größer als der von  $v_8$ .
- ◆ Das Monotonieverhalten von  $f$  stimmt mit dem von  $v_8$  überein.

**g** Es gilt  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \left( \frac{\sqrt{2}}{4} x - \sqrt{2} \right) - f(x) \right) = 0$ . Beschreiben Sie die grafische Bedeutung dieser Aussage.

**2** Auf einer 3 km langen Teststrecke fährt ein Testfahrzeug mit konstanter Geschwindigkeit. In Abhängigkeit von der vom Startpunkt aus zurückgelegten Strecke in Kilometern wird durchgehend der lokale Kraftstoffverbrauch des Fahrzeugs in Millilitern pro Kilometer gemessen.

**a** Für den ersten Abschnitt der Fahrt liegen folgende Messwerte vor:

zurückgelegte Strecke in km	0,00	0,25	0,50	0,75	1,00
lokaler Verbrauch in $\frac{\text{ml}}{\text{km}}$	66,3	80,5	88,7	91,8	90,7

Die gemessenen Werte für den lokalen Kraftstoffverbrauch lassen sich in Abhängigkeit von der zurückgelegten Strecke modellhaft durch eine ganzrationale Funktion beschreiben. Ermitteln Sie einen passenden Funktionsterm.

Für die gesamte Fahrt kann der lokale Kraftstoffverbrauch in Abhängigkeit von der zurückgelegten Strecke mithilfe der in  $\mathbb{R}$  definierten Funktion  $k$  mit  $k(x) = 10x^3 - 57x^2 + 72x + 66$  beschrieben werden. Dabei ist  $x$  die zurückgelegte Strecke in km und  $k(x)$  der lokale Verbrauch in  $\frac{\text{ml}}{\text{km}}$ .

**b** Zeigen Sie, dass die Funktion  $k$  für den Startpunkt und für eine zurückgelegte Strecke von 1,00 km jeweils einen Wert liefert, der vom zugehörigen Messwert um weniger als 0,5 % abweicht.

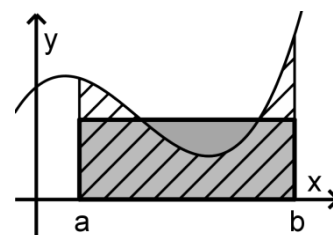
**c** Ermitteln Sie für die gesamte Fahrt den größten lokalen Verbrauch sowie diejenige Stelle der Teststrecke, an der sich der lokale Verbrauch am stärksten geändert hat.

Im Tank des Fahrzeugs befanden sich am Startpunkt genau 1000 ml Kraftstoff.

**d** Begründen Sie, dass der Term  $1000 - \int_0^x k(z) dz$  in Abhängigkeit von der zurückgelegten Strecke den momentanen Tankinhalt liefert.

**e** Der durchschnittliche Funktionswert einer Funktion  $g$  im Intervall  $[a; b]$  kann mithilfe der folgenden Überlegung bestimmt werden:

Schließt der Graph von  $g$  mit der  $x$ -Achse und den Geraden mit den Gleichungen  $x = a$  und  $x = b$  ein Flächenstück ein, so gibt es ein Rechteck der Länge  $b - a$ , das den gleichen Flächeninhalt wie das Flächenstück hat (vgl. Abbildung). Die Breite dieses Rechtecks stimmt mit dem Betrag des durchschnittlichen Funktionswerts von  $g$  im Intervall  $[a; b]$  überein.



6

2

3

2

5

2

4

Bestimmen Sie den durchschnittlichen Kraftstoffverbrauch des Fahrzeugs auf der gesamten 3 km langen Fahrt. Zeigen Sie, dass sich der durchschnittliche Kraftstoffverbrauch des Fahrzeugs in Abhängigkeit von der zurückgelegten Strecke mithilfe der Funktion  $d$  mit  $d(x) = \frac{5}{2}x^3 - 19x^2 + 36x + 66$  beschreiben lässt.

40

## 2 Erwartungshorizont

Der Erwartungshorizont stellt für jede Teilaufgabe eine mögliche Lösung dar. Nicht dargestellte korrekte Lösungen sind als gleichwertig zu akzeptieren.

		BE
1	a Die Graphen bestehen aus Punkten mit positiven y-Koordinaten, haben genau drei Extrempunkte und sind symmetrisch bezüglich einer Parallele zur y-Achse.	3
	b $v'_8(x) = 0 \wedge v''_8(x) < 0 \Leftrightarrow x = 4, v_8(4) = 5$	2
	c Der Graph von $v_8$ berührt im Punkt $(8   v_8(8))$ die Gerade mit der Gleichung $y = 1$ , im Punkt $(\frac{8}{3}   v_8(\frac{8}{3}))$ die Gerade mit der Gleichung $y = \frac{32}{27}x + 1$ .	4
	d $v''_t(x) = 0 \wedge v'''_t(x) \neq 0 \Leftrightarrow x = x_3 \vee x = x_4$ $v_t(x_3) = v_t(x_4) = \frac{1}{36}t^2 + 1$	3
	e Das Dreieck kann den rechten Winkel nur beim Wendepunkt W haben. Mit $x_3 = \frac{t}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6}t$ und $\overline{WP} \cdot \overline{WQ} = 0$ ergibt sich $t = \frac{6}{5}\sqrt{35}$ .	4
	f ♦ Die Aussage ist richtig. Begründung: Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt $v_8(x) \geq 1$ und damit $f(x) \leq v_8(x)$ .  ♦ Die Aussage ist richtig. Begründung: Es gilt $f'(x) = \frac{1}{4 \cdot \sqrt[4]{v_8(x)}^3} \cdot v'_8(x) = 0 \Leftrightarrow v'_8(x) = 0$ und, da $\frac{1}{4 \cdot \sqrt[4]{v_8(x)}^3} > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ , $f'(x) > 0 \Leftrightarrow v'_8(x) > 0$ .	6
	g Die Gerade mit der Gleichung $y = \frac{\sqrt{2}}{4}x - \sqrt{2}$ ist für $X \rightarrow +\infty$ Asymptote des Graphen von f.	2
2	a $g(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ Mit den angegebenen Messwerten ergibt sich $a = 0,0$ , $b = 9,6$ , $c = -55,2$ , $d = 70,0$ und $e = 66,3$ .	3
	b $\left  \frac{k(0) - 66,3}{66,3} \right  \approx 0,0045 < 0,005$ , $\left  \frac{k(1) - 90,7}{90,7} \right  \approx 0,0033 < 0,005$	2
	c Für $0 \leq x \leq 3$ hat k bei $x = \frac{4}{5}$ den größten Wert. Der größte Kraftstoffverbrauch beträgt etwa $92,2 \frac{\text{ml}}{\text{km}}$ .	5

	$k''(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{19}{10}$ Mit $k'(0) = 72$ , $k'(\frac{19}{10}) = -\frac{363}{10}$ und $k'(3) = 0$ ergibt sich, dass sich der lokale Verbrauch am Startpunkt am stärksten geändert hat.	
d	1000 ist der Tankinhalt am Startpunkt in ml, das Integral gibt die seit dem Start verbrauchte Kraftstoffmenge in ml an. Die Differenz stellt damit den momentanen Tankinhalt in ml dar.	2
e	$\frac{1}{3} \cdot \int_0^3 k(x) dx = 70,5$ , d. h. der durchschnittliche Kraftstoffverbrauch beträgt $70,5 \frac{\text{ml}}{\text{km}}$ . Es gilt $k(0) = d(0)$ sowie für $x > 0$ $\frac{1}{x} \cdot \int_0^x k(z) dz = d(x)$ .	4
		40

### 3 Standardbezug

Teilaufgabe	BE	allgemeine mathematische Kompetenzen						Anforderungsbereich		
		K1	K2	K3	K4	K5	K6	I	II	III
1 a	3	I			I		I	X		
b	2	I				I		X		
c	4	II	II		II	II	II		X	
d	3	I				I		X		
e	4	II	II			I			X	
f	6	III	III			II				X
g	2	III			II	II	II			X
2 a	3		II			I			X	
b	2					I		X		
c	5	II		II		I			X	
d	2	II		II			I		X	
e	4	III		I	II	II	III			X

### 4 Bewertungshinweise

Die Bewertung der erbrachten Prüfungsleistungen hat sich für jede Teilaufgabe nach der am rechten Rand der Aufgabenstellung angegebenen Anzahl maximal erreichbarer Bewertungseinheiten (BE) zu richten.

Für die Bewertung der Gesamtleistung eines Prüflings ist ein Bewertungsraster<sup>2</sup> vorgesehen, das angibt, wie die in den Prüfungsteilen A und B insgesamt erreichten Bewertungseinheiten in Notenpunkte umgesetzt werden.

<sup>2</sup> Das Bewertungsraster ist Teil des Dokuments „Beschreibung der Struktur“, das auf den Internetseiten des IQB zum Download bereitsteht.