Gemeinsame Abituraufgabenpools der Länder

Pool für das Jahr 2020

Aufgaben für das Fach Mathematik

Kurzbeschreibung

Anforderungsniveau	Prüfungsteil	Sachgebiet[1]	digitales Hilfsmittel
erhöht	B	AG/LA (A2)	WTR

1 Aufgabe

BE

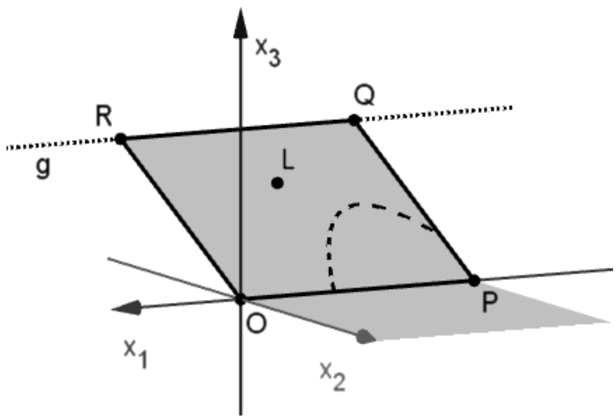
Gegeben sind der Punkt $L\left(-\frac{25}{4}\,|\,-8\,|\,6\right)$ und die Gerade $g:\vec{x}=\begin{pmatrix}0\\-12\\9\end{pmatrix}+a\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, $a\in\mathbb{R}$.

a Begründen Sie, dass g parallel zur x_1-Achse und dabei nicht durch L verläuft. 2

b L und g liegen in der Ebene E. Ermitteln Sie eine Gleichung von E in Koordinatenform. 4

(zur Kontrolle: $3x_2+4x_3=0$)

In der Abbildung ist neben L und g das Viereck OPQR dargestellt, dessen Eckpunkte $O(0\,|\,0\,|\,0)$, $P\left(-\frac{25}{2}\,|\,0\,|\,0\right)$, $Q\left(-\frac{25}{2}\,|\,-12\,|\,9\right)$ und $R(0\,|\,-12\,|\,9)$ in E liegen. Q und R liegen außerdem auf g.



c Begründen Sie, dass OPQR ein Rechteck ist. 2

[1] verwendete Abkürzungen: AG/LA (A1) - Analytische Geometrie/Lineare Algebra (Alternative A1), AG/LA (A2) - Analytische Geometrie/Lineare Algebra (Alternative A2)

d	Beschreiben Sie ein Verfahren, mit dem man die Koordinaten des Punkts S ermitteln könnte, für den das Viereck OPSR ein ebenes Drachenviereck ist.	3

Das Viereck OPQR stellt modellhaft den geneigten Teil einer Minigolfbahn dar, der Punkt L das Loch dieser Bahn. Im verwendeten Koordinatensystem beschreibt die x_1x_2-Ebene den horizontalen Untergrund; eine Längeneinheit entspricht 10 cm in der Realität.

e	Berechnen Sie den Flächeninhalt des geneigten Teils der Bahn.	2
f	Berechnen Sie die Größe des Winkels, den der geneigte Teil der Bahn mit dem Untergrund einschließt.	3

Im Folgenden wird der in der Abbildung gestrichelt dargestellte Teil des Wegs eines Minigolfballs betrachtet. Der Ball soll im Folgenden als punktförmig angenommen werden. Seine Positionen auf dem dargestellten Teil des Wegs können durch Punkte $B_k\left(-5-3k \mid -8k+\frac{8}{3}k^2 \mid 6k-2k^2\right)$ mit geeigneten Werten von $k \in \mathbb{R}$ beschrieben werden.

g	Weisen Sie nach, dass der Ball auf dem betrachteten Teil seines Wegs durchgehend Kontakt zur Minigolfbahn hat.	2
h	Berechnen Sie im Modell die Koordinaten des Punkts, in dem der Ball auf die seitliche Begrenzung der Minigolfbahn trifft.	4
i	Ermitteln Sie die maximale Höhe über dem Untergrund, die der Ball erreicht.	3
		25

2 Erwartungshorizont

Der Erwartungshorizont stellt für jede Teilaufgabe eine mögliche Lösung dar. Nicht dargestellte korrekte Lösungen sind als gleichwertig zu akzeptieren.

		BE
a	Der Richtungsvektor $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ von g gibt auch die Richtung der x_1-Achse an. Wegen $-12+a\cdot 0 \neq -8$ für alle $a \in \mathbb{R}$ verläuft g nicht durch L.	2
b	$\begin{pmatrix}0\\-12\\9\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-\frac{25}{4}\\-8\\6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{25}{4}\\-4\\3\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}\frac{25}{4}\\-4\\3\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}n_1\\n_2\\n_3\end{pmatrix}=0 \wedge \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}n_1\\n_2\\n_3\end{pmatrix}=0$ liefert $n_1=0$ und damit $-4n_2+3n_3=0$, d. h. $\begin{pmatrix}0\\3\\4\end{pmatrix}$ ist ein Normalenvektor von E. Die Gleichung von E hat also die Form $3x_2+4x_3=b$.	4

	$L \in E \Leftrightarrow b = 3\cdot(-8)+4\cdot 6 = 0$	
c	Da O und P auf der x_1-Achse sowie Q und R auf g liegen, sind $\overline{OP}$ und $\overline{QR}$ parallel zueinander. Wegen $\overrightarrow{OR} = \overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} 0 \\ -12 \\ 9 \end{pmatrix}$ stehen $\overline{OR}$ und $\overline{PQ}$ senkrecht zur x_1-Achse.	2
d	Man bestimmt die Koordinaten des Schnittpunkts F der Gerade durch P und R mit der Ebene, die senkrecht zu dieser Gerade steht und den Punkt O enthält. Damit liefert $\overrightarrow{OS} = 2\cdot\overrightarrow{OF}$ die Koordinaten von S.	3
e	$\left\lvert\overrightarrow{OP}\right\rvert \cdot \left\lvert\overrightarrow{OR}\right\rvert = \frac{25}{2}\cdot\sqrt{12^2+9^2} = 187{,}5$, d. h. der Flächeninhalt beträgt etwa $1{,}9\,m^2$.	2
f	$\cos\alpha = \dfrac{\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}{\left\lvert\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}\right\rvert \cdot \left\lvert\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\rvert}$, d. h. $\alpha \approx 36{,}9°$	3
g	Da $3\cdot\left(-8k+\frac{8}{3}k^2\right)+4\cdot\left(6k-2k^2\right)=0$ für alle $k \in \mathbb{R}$, liegen alle Punkte B_k in E.	2
h	Gerade durch P und Q: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -\frac{25}{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + d\cdot\begin{pmatrix} 0 \\ -12 \\ 9 \end{pmatrix}$, $d \in \mathbb{R}$ $\begin{pmatrix} -5-3k \\ -8k+\frac{8}{3}k^2 \\ 6k-2k^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{25}{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + d\cdot\begin{pmatrix} 0 \\ -12 \\ 9 \end{pmatrix}$ liefert $k = \frac{5}{2}$. Damit: $\left(-\frac{25}{2} \mid -\frac{10}{3} \mid \frac{5}{2}\right)$	4
i	Die Höhe des Balls über dem Untergrund kann mithilfe der Funktion h mit $h(k) = 6k-2k^2$ beschrieben werden. $h'(k) = 6-4k = 0 \Leftrightarrow k = \frac{3}{2}$ $h\left(\frac{3}{2}\right) = 4{,}5$, d. h. der Ball erreicht eine maximale Höhe von 45 cm über dem Untergrund.	3
		25

3 Standardbezug

Teilaufgabe	BE	allgemeine mathematische Kompetenzen						Anforderungsbereich		
		K1	K2	K3	K4	K5	K6	I	II	III
a	2	I				I	I	X		
b	4		I			II			X	

c	2	I				I	I	X		
d	3		II		I	I	II		X	
e	2			I		I		X		
f	3			I		II			X	
g	2			I		II			X	
h	4		III	II		II				X
i	3		III	III		II	II			X

4 Bewertungshinweise

Die Bewertung der erbrachten Prüfungsleistungen hat sich für jede Teilaufgabe nach der am rechten Rand der Aufgabenstellung angegebenen Anzahl maximal erreichbarer Bewertungseinheiten (BE) zu richten.

Für die Bewertung der Gesamtleistung eines Prüflings ist ein Bewertungsraster[2] vorgesehen, das angibt, wie die in den Prüfungsteilen A und B insgesamt erreichten Bewertungseinheiten in Notenpunkte umgesetzt werden.

[2] Das Bewertungsraster ist Teil des Dokuments „Beschreibung der Struktur“, das auf den Internetseiten des IQB zum Download bereitsteht.