

Gemeinsame Abituraufgabenpools der Länder

Pool für das Jahr 2020

Aufgaben für das Fach Mathematik

Kurzbeschreibung

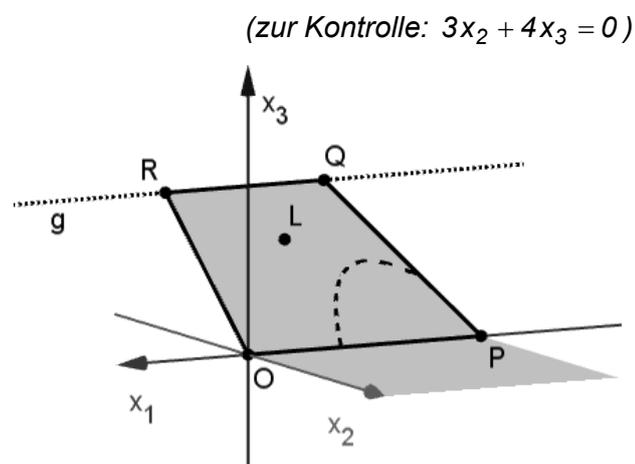
Anforderungsniveau	Prüfungsteil	Sachgebiet ¹	digitales Hilfsmittel
erhöht	B	AG/LA (A2)	CAS

1 Aufgabe

Gegeben sind der Punkt $L\left(-\frac{25}{4} \mid -8 \mid 6\right)$ und die Gerade $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -12 \\ 9 \end{pmatrix} + a \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $a \in \mathbb{R}$.

- a** Begründen Sie, dass g parallel zur x_1 -Achse und dabei nicht durch L verläuft. 2
- b** L und g liegen in der Ebene E . Ermitteln Sie eine Gleichung von E in Koordinatenform. 3

In der Abbildung ist neben L und g das Viereck $OPQR$ dargestellt, dessen Eckpunkte $O(0 \mid 0 \mid 0)$, $P\left(-\frac{25}{2} \mid 0 \mid 0\right)$, $Q\left(-\frac{21}{2} \mid -12 \mid 9\right)$ und $R(-2 \mid -12 \mid 9)$ in E liegen. Q und R liegen außerdem auf g .



- c** Begründen Sie, dass $OPQR$ ein achsensymmetrisches Trapez ist. 4

¹ verwendete Abkürzungen: AG/LA (A1) - Analytische Geometrie/Lineare Algebra (Alternative A1),
AG/LA (A2) - Analytische Geometrie/Lineare Algebra (Alternative A2)

<p>d Ermitteln Sie die Koordinaten des Punkts S, für den das Viereck OPSR ein ebenes Drachenviereck ist.</p> <p>Das Viereck OPQR stellt modellhaft den geneigten Teil einer Minigolfbahn dar, der Punkt L das Loch dieser Bahn. Im verwendeten Koordinatensystem beschreibt die x_1x_2-Ebene den horizontalen Untergrund; eine Längeneinheit entspricht 10 cm in der Realität.</p>	5
<p>e Berechnen Sie die Größe des Winkels, den der geneigte Teil der Bahn mit dem Untergrund einschließt.</p> <p>Im Folgenden wird der in der Abbildung gestrichelt dargestellte Teil des Wegs eines Minigolfsballs betrachtet. Der Ball soll im Folgenden als punktförmig angenommen werden. Seine Positionen auf dem dargestellten Teil des Wegs können durch Punkte $B_k \left(-5 - 3k \mid -8k + \frac{8}{3}k^2 \mid 6k - 2k^2 \right)$ mit geeigneten Werten von $k \in \mathbb{R}$ beschrieben werden.</p>	2
<p>f Weisen Sie nach, dass der Ball auf dem betrachteten Teil seines Wegs durchgehend Kontakt zur Minigolfbahn hat.</p>	2
<p>g Berechnen Sie im Modell die Koordinaten des Punkts, in dem der Ball auf die seitliche Begrenzung der Minigolfbahn trifft.</p>	4
<p>h Ermitteln Sie rechnerisch, um wie viele Zentimeter der Ball das Loch verfehlt.</p>	3
	25

2 Erwartungshorizont

Der Erwartungshorizont stellt für jede Teilaufgabe eine mögliche Lösung dar. Nicht dargestellte korrekte Lösungen sind als gleichwertig zu akzeptieren.

	BE
<p>a Der Richtungsvektor $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ von g gibt auch die Richtung der x_1-Achse an.</p> <p>Wegen $-12 + a \cdot 0 \neq -8$ für alle $a \in \mathbb{R}$ verläuft g nicht durch L.</p>	2
<p>b $\begin{pmatrix} 0 \\ -12 \\ 9 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -\frac{25}{4} \\ -8 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{25}{4} \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}$</p> <p>$\begin{pmatrix} \frac{25}{4} \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} = 0 \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} = 0$ liefert $\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ als Normalenvektor von E. Die Gleichung von E hat also die Form $3x_2 + 4x_3 = b$.</p> <p>$L \in E \Leftrightarrow b = 3 \cdot (-8) + 4 \cdot 6 = 0$</p>	3

c	\overline{RQ} hat den Mittelpunkt $M_1\left(-\frac{25}{4} \mid -12 \mid 9\right)$, \overline{OP} den Mittelpunkt $M_2\left(-\frac{25}{4} \mid 0 \mid 0\right)$. Es gilt $\overline{OP} \circ \overline{M_1M_2} = 0$ und $\overline{RQ} \circ \overline{M_1M_2} = 0$.	4
d	Gerade durch P und R: $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} -\frac{25}{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c \cdot \begin{pmatrix} \frac{21}{2} \\ -12 \\ 9 \end{pmatrix}$, $c \in \mathbb{R}$ Ebene senkrecht zu h durch O: $\frac{21}{2}x_1 - 12x_2 + 9x_3 = 0$ Mit $\frac{21}{2} \cdot \left(-\frac{25}{2} + \frac{21}{2}c\right) - 12 \cdot (-12c) + 9 \cdot 9c = 0$ ergibt sich für den Fußpunkt F des Lots von O auf die Gerade PR: $x_1 = -\frac{1250}{149}$, $x_2 = -\frac{700}{149}$, $x_3 = \frac{525}{149}$ Mit $\overline{OS} = 2 \cdot \overline{OF}$ ergibt sich $S\left(-\frac{2500}{149} \mid -\frac{1400}{149} \mid \frac{1050}{149}\right)$.	5
e	$\cos \alpha = \frac{\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}$, d. h. $\alpha \approx 36,9^\circ$	2
f	Da $3 \cdot \left(-8k + \frac{8}{3}k^2\right) + 4 \cdot (6k - 2k^2) = 0$ für alle $k \in \mathbb{R}$, liegen alle Punkte B_k in E.	2
g	Gerade durch P und Q: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -\frac{25}{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + d \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -12 \\ 9 \end{pmatrix}$, $d \in \mathbb{R}$ $\begin{pmatrix} -5 - 3k \\ -8k + \frac{8}{3}k^2 \\ 6k - 2k^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{25}{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + d \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -12 \\ 9 \end{pmatrix}$ liefert für $d \in [0; 1]$: $d = \frac{3}{8}$ Damit: $\left(-\frac{47}{4} \mid -\frac{9}{2} \mid \frac{27}{8}\right)$	4
h	Der Abstand des Balls zum Loch kann in Abhängigkeit von k mithilfe der Funktion f mit $f(k) = \left\ \begin{pmatrix} -5 - 3k \\ -8k + \frac{8}{3}k^2 \\ 6k - 2k^2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -\frac{25}{4} \\ -8 \\ 6 \end{pmatrix} \right\ $ beschrieben werden. Die Funktion f nimmt ihr Minimum für $k = k_1$ an mit $f(k_1) \approx 3,6$. Der Abbildung ist zu entnehmen, dass es sich dabei um das gesuchte Minimum von f handelt, der Ball rollt also etwa 36 cm am Loch vorbei.	3
		25

3 Standardbezug

Teilaufgabe	BE	allgemeine mathematische Kompetenzen						Anforderungsbereich		
		K1	K2	K3	K4	K5	K6	I	II	III
a	2	I				I	I	X		
b	3		I			II			X	
c	4	I				I	I	X		
d	5		II		I	II	II		X	
e	2			I		II			X	
f	2			I		II			X	
g	4		III	II		II				X
h	3		III	III		II	II			X

4 Bewertungshinweise

Die Bewertung der erbrachten Prüfungsleistungen hat sich für jede Teilaufgabe nach der am rechten Rand der Aufgabenstellung angegebenen Anzahl maximal erreichbarer Bewertungseinheiten (BE) zu richten.

Für die Bewertung der Gesamtleistung eines Prüflings ist ein Bewertungsraster² vorgesehen, das angibt, wie die in den Prüfungsteilen A und B insgesamt erreichten Bewertungseinheiten in Notenpunkte umgesetzt werden.

² Das Bewertungsraster ist Teil des Dokuments „Beschreibung der Struktur“, das auf den Internetseiten des IQB zum Download bereitsteht.