Gemeinsame Abituraufgabenpools der Länder

Pool für das Jahr 2019

Aufgaben für das Fach Mathematik

Kurzbeschreibung

Anforderungsniveau	Prüfungsteil	Sachgebiet[1]	digitales Hilfsmittel
grundlegend	B	Analysis	WTR

1 Aufgabe

BE

1 Betrachtet werden die in $\mathbb{R}$ definierten Funktionen $f_k : x \mapsto -kx \cdot (x-8)$ mit $k \in \mathbb{R}^+$. Der Graph von f_k wird mit G_k bezeichnet.

a Geben Sie die Nullstellen von f_k an. 2

b Begründen Sie, dass der Punkt $(4\,|\,16k)$ der Hochpunkt von G_k ist. 3

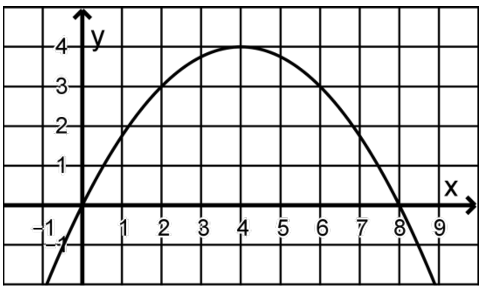
c Bestimmen Sie den Abstand der Hochpunkte von G_k und G_{k+1}. 2

d Berechnen Sie denjenigen Wert von k, für den der Inhalt der Fläche, die G_k mit der x-Achse einschließt, $\frac{64}{3}$ beträgt. 4

e Geben Sie die Stelle an, an der jede Stammfunktion von $f_{\frac{1}{4}}$ ihr Maximum annimmt. Begründen Sie Ihre Angabe ohne Verwendung eines Terms einer Stammfunktion. 3

Die Abbildung zeigt den Graphen von $f_{\frac{1}{4}}$.

Betrachtet werden die Trapeze mit den Eckpunkten $A(0\,|\,0)$, $B(8\,|\,0)$, $C_u\left(8-u\,|\,f_{\frac{1}{4}}(u)\right)$ und $D_u\left(u\,|\,f_{\frac{1}{4}}(u)\right)$, wobei u alle Werte des Intervalls $]0;4[$ annimmt.



f Zeichnen Sie das Trapez für $u = 1$ in die Abbildung ein. 2

[1] verwendete Abkürzungen: AG/LA (A1) - Analytische Geometrie/Lineare Algebra (Alternative A1), AG/LA (A2) - Analytische Geometrie/Lineare Algebra (Alternative A2)

g Geben Sie einen Term an, mit dem die Länge der beiden gleich langen Schenkel des Trapezes ABC_uD_u berechnet werden kann. 2

h Der Flächeninhalt des Trapezes ABC_uD_u kann mit dem Term $(8-u)\cdot f_{\frac{1}{4}}(u)$ berechnet werden. Beschreiben Sie eine geometrische Überlegung, mit der sich dieser Term herleiten lässt. 4

i Unter den betrachteten Trapezen hat eines den größten Flächeninhalt. Ermitteln Sie den zugehörigen Wert von u. 5

j Berechnen Sie die Koordinaten des Mittelpunkts des Kreises, auf dem die Punkte A, B und $E(4|8)$ liegen. 4

2 In einem Raum wurde die Wirksamkeit der Lüftungsanlage untersucht. Dazu wurde die Konzentration des Kohlendioxids (CO_2) in der Luft gemessen, während sich eine Personengruppe im Raum befand. Die Messwerte können mithilfe der in $\mathbb{R}$ definierten Funktion $g: x \mapsto -600e^{-0,5x} + 1000$ beschrieben werden. Dabei ist x die seit Beginn der Untersuchung vergangene Zeit in Stunden und $g(x)$ die CO_2-Konzentration in „parts per million“ (kurz: ppm).

a Bestimmen Sie die CO_2-Konzentration zu Beginn der Untersuchung. 1

b Einer Studie zufolge fühlen sich Personen in Räumen wohl, wenn die CO_2-Konzentration geringer als 1000 ppm ist. Untersuchen Sie, ob diese Bedingung während der Untersuchung erfüllt war. 2

c Stellen Sie die zeitliche Entwicklung der CO_2-Konzentration für die ersten zehn Stunden nach Beginn der Untersuchung grafisch dar. 2

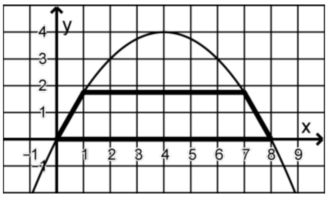
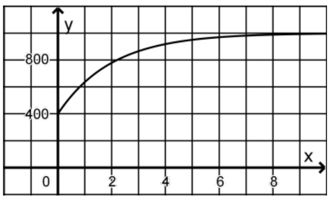
d Zeigen Sie, dass die mittlere Änderungsrate der CO_2-Konzentration für jede Zeitspanne mit einer Länge von einer Stunde mithilfe des Terms $600\cdot\left(1-\frac{1}{\sqrt{e}}\right)\cdot e^{-0,5x}$ bestimmt werden kann. Berechnen Sie denjenigen Zeitpunkt auf eine Minute genau, für den die beschriebene mittlere Änderungsrate erstmals den Wert $100\,\frac{\text{ppm}}{\text{h}}$ unterschreitet. 4

40

2 Erwartungshorizont

Der Erwartungshorizont stellt für jede Teilaufgabe eine mögliche Lösung dar. Nicht dargestellte korrekte Lösungen sind als gleichwertig zu akzeptieren.

			BE
1	**a**	$x_1 = 0$ und $x_2 = 8$	2
	b	G_k ist eine nach unten geöffnete Parabel. Aufgrund der Lage der Schnittpunkte mit der x-Achse liegt der Hochpunkt bei $x = 4$. Es gilt $f_k(4) = 16k$.	3
	c	$16(k+1) - 16k = 16$	2

	d	$\int\limits_0^8 f_k(x)\,dx = -k\cdot\left[\frac{1}{3}x^3-4x^2\right]_0^8 = k\cdot\frac{256}{3}=\frac{64}{3}\Leftrightarrow k=\frac{1}{4}$	4
	e	Für jede Stammfunktion F von $f_{\frac14}$ gilt $F'(x)=f_{\frac14}(x)$. Da $f_{\frac14}(x)>0$ für $0<x<8$ und $f_{\frac14}(x)<0$ für $x>8$, nimmt die Funktion F ihr Maximum bei $x=8$ an.	3
	f		2
	g	$\sqrt{u^2+\left(f_{\frac14}(u)\right)^2}$	2
	h	Der Flächeninhalt des Trapezes ist das Produkt der Länge der Mittelparallele und der Länge der Höhe des Trapezes. Die Länge der Mittelparallele ist der Mittelwert der Längen der beiden parallelen Seiten, d. h. der Mittelwert von 8 und $8-2u$, also $8-u$. Die Länge der Höhe des Trapezes ist $f_{\frac14}(u)$.	4
	i	Die Flächeninhalte der Trapeze können in Abhängigkeit von u mithilfe der Funktion T mit $T(u)=(8-u)\cdot f_{\frac14}(u)=-(8-u)\cdot\frac14u\cdot(u-8)=\frac14u\cdot(u-8)^2=\frac14u\cdot\left(u^2-16u+64\right)$ $=\frac14u^3-4u^2+16u$ dargestellt werden. $T'(u)=\frac34u^2-8u+16=0\Leftrightarrow u=\frac{8\pm\sqrt{64-48}}{\frac32}\Leftrightarrow u=\frac83\vee u=8$ Mit $u\in\left]0;4\right[$ ergibt sich $u=\frac83$.	5
	j	Der Mittelpunkt liegt auf der Mittelsenkrechte von A und B, hat also die x-Koordinate 4. Da der Mittelpunkt den gleichen Abstand von A und E hat, gilt für seine y-Koordinate: $4^2+y^2=(8-y)^2\Leftrightarrow 16=64-16y\Leftrightarrow y=3$	4
2	a	$g(0)=400$, d. h. die CO_2-Konzentration beträgt zu Beginn 400 ppm.	1
	b	Wegen $e^{-0,5x}>0$ gilt $g(x)<1000$, d. h. die Bedingung war erfüllt.	2
	c		2

d	$\frac{g(x+1)-g(x)}{1} = -600e^{-0,5\cdot(x+1)} + 600e^{-0,5x} = 600\cdot\left(-\frac{e^{-0,5x}}{\sqrt{e}} + e^{-0,5x}\right) = 600\cdot\left(1-\frac{1}{\sqrt{e}}\right)\cdot e^{-0,5x}$ $600\cdot\left(1-\frac{1}{\sqrt{e}}\right)\cdot e^{-0,5x} = 100 \Leftrightarrow e^{0,5x} = 6\cdot\left(1-\frac{1}{\sqrt{e}}\right) \Leftrightarrow x = 2\cdot\ln\left(6\cdot\left(1-\frac{1}{\sqrt{e}}\right)\right)$ Damit: $x \approx 1{,}72$, d. h. die beschriebene mittlere Änderungsrate unterschreitet den gegebenen Wert erstmals etwa 103 Minuten nach Beginn der Untersuchung.	4
		40

3 Standardbezug

Teilaufgabe	BE	allgemeine mathematische Kompetenzen						Anforderungsbereich		
		K1	K2	K3	K4	K5	K6	I	II	III
1 a	2				I	I		X		
b	3	I	I			I		X		
c	2		I			I		X		
d	4		I			II			X	
e	3	II	II			I			X	
f	2				I		I	X		
g	2		I		I	I		X		
h	4	II	II				II		X	
i	5		I			II	I		X	
j	4	II	III			II				X
2 a	1			I		I	I	X		
b	2	II		I		II			X	
c	2				I			X		
d	4		II	II		II				X

4 Bewertungshinweise

Die Bewertung der erbrachten Prüfungsleistungen hat sich für jede Teilaufgabe nach der am rechten Rand der Aufgabenstellung angegebenen Anzahl maximal erreichbarer Bewertungseinheiten (BE) zu richten.

Für die Bewertung der Gesamtleistung eines Prüflings ist ein Bewertungsraster[2] vorgesehen, das angibt, wie die in den Prüfungsteilen A und B insgesamt erreichten Bewertungseinheiten in Notenpunkte umgesetzt werden.

[2] Das Bewertungsraster ist Teil des Dokuments „Beschreibung der Struktur“, das auf den Internetseiten des IQB zum Download bereitsteht.