Institut zur Qualitätsentwicklung
im Bildungswesen

KULTUSMINISTER
KONFERENZ

Gemeinsame Abituraufgabenpools der Länder

Pool für das Jahr 2019

Aufgaben für das Fach Mathematik

Kurzbeschreibung

Anforderungsniveau	Prüfungsteil	Sachgebiet[1]	digitales Hilfsmittel
grundlegend	B	Analysis	WTR

1 Aufgabe

BE

Die Abbildung 1 zeigt den Graphen der Funktion k mit
$k(x)=\frac{1}{40}\cdot\left(x^3-30x^2+288x-815\right)$ und $x\in\mathbb{R}$.

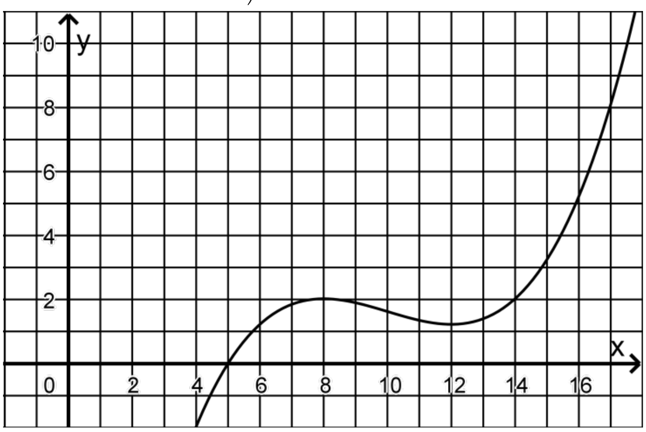


Abb. 1

1 Im Rahmen eines Tests läuft ein Sportler auf einem Laufband. Dabei wird bei ansteigender Geschwindigkeit jeweils die Konzentration sogenannter Laktate im Blut gemessen. Die Abhängigkeit der Laktatkonzentration von der Geschwindigkeit kann für $8{,}5\le x\le 17{,}5$ modellhaft durch die Funktion k beschrieben werden. Dabei ist x die Geschwindigkeit des Sportlers in Kilometer pro Stunde und $k(x)$ die Laktatkonzentration in Millimol pro Liter ($\frac{\text{mmol}}{\text{l}}$).

[1] verwendete Abkürzungen: AG/LA (A1) - Analytische Geometrie/Lineare Algebra (Alternative A1), AG/LA (A2) - Analytische Geometrie/Lineare Algebra (Alternative A2)

a Der Tabelle können einzelne Werte entnommen werden, die während des Tests gemessen wurden. 2

Geschwindigkeit in $\frac{km}{h}$	9	13	17
Laktatkonzentration in $\frac{mmol}{l}$	1,92	1,44	8,09

Ermitteln Sie die prozentuale Abweichung der Laktatkonzentration, die das Modell für eine Geschwindigkeit von $13\frac{km}{h}$ liefert, vom zugehörigen Messwert.

b Bestimmen Sie im Modell mithilfe von Abbildung 1 die Geschwindigkeit, ab der die Laktatkonzentration ansteigt, sowie die Geschwindigkeit, bei der die Laktatkonzentration $3{,}25\frac{mmol}{l}$ überschreitet. 2

c Ermitteln Sie rechnerisch, bei welcher Geschwindigkeit die Laktatkonzentration im Modell am stärksten abnimmt. 4

d Berechnen Sie im Modell für den Geschwindigkeitsbereich von $12{,}0\frac{km}{h}$ bis $17{,}5\frac{km}{h}$ die mittlere Änderungsrate der Laktatkonzentration. 3

2 Der Graph von k ist symmetrisch bezüglich seines Wendepunkts $W\left(10\,|\,\frac{13}{8}\right)$. Betrachtet werden die Geraden, die durch W verlaufen.

a Eine Gerade durch W mit negativer Steigung hat mit dem Graphen von k keinen weiteren Punkt gemeinsam. Ermitteln Sie alle Steigungen, die diese Gerade haben könnte. 3

b Die y-Koordinate des Schnittpunkts einer der durch W verlaufenden Geraden mit der y-Achse wird mit n bezeichnet. Stellen Sie einen Term auf, der n in Abhängigkeit von der Steigung m dieser Gerade angibt. 2

c Zeigen Sie rechnerisch, dass der Graph der in $\mathbb{R}$ definierten Funktion g mit $g(x)=\frac{13}{40}\cdot(x-5)$ durch W verläuft. Zeichnen Sie diese Gerade in die Abbildung 1 ein. 3

d Beschreiben Sie, wie man die Lösungen der Gleichung $k(x)-g(x)=0$ grafisch ermitteln kann. Geben Sie die Lösungen der Gleichung an. 3

e Begründen Sie ohne zu rechnen, dass $\int_5^{15} k(x)\,dx=\frac{1}{2}\cdot(15-5)\cdot k(15)$ gilt. 4

f Begründen Sie mithilfe der Abbildung 1, dass es eine reelle Zahl z mit $4<z<5$ gibt, für die $\int_z^{z+1} k(x)\,dx=0$ gilt. 3

3 Neben der Funktion g aus Aufgabe 2 wird im Folgenden die Funktion h mit $h(x)=\frac{40}{13}\cdot\frac{1}{(x-5)}$ und $x\in\mathbb{R}\setminus\{5\}$ betrachtet. Die Abbildung 2 zeigt den Graphen von h.

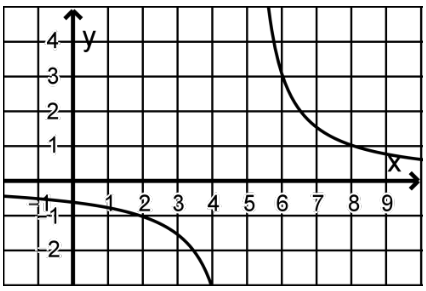
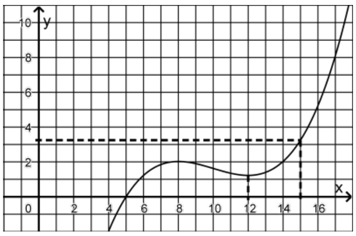
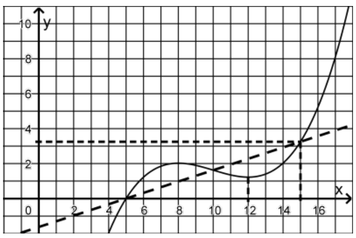


Abb. 2

a	Beschreiben Sie, wie der Graph von h aus dem Graphen der Funktion i mit $i(x)=\frac{1}{x}$ und $x \in IR \setminus \{0\}$ hervorgeht.	2
b	Berechnen Sie die Koordinaten der beiden Punkte, die die Graphen von g und h gemeinsam haben.	4
c	Begründen Sie, dass es keine Gerade gibt, die sowohl Tangente des Graphen von g als auch Tangente des Graphen von h ist.	2
d	Geben Sie eine Möglichkeit für Werte von $a,b \in \left]-\infty;5\right[$ und $c,d \in \left]5;+\infty\right[$ an, für die $\int_a^b h(x)\,dx \cdot \int_c^d h(x)\,dx > 0$ gilt. Begründen Sie Ihre Angabe.	3
		40

2 Erwartungshorizont

Der Erwartungshorizont stellt für jede Teilaufgabe eine mögliche Lösung dar. Nicht dargestellte korrekte Lösungen sind als gleichwertig zu akzeptieren.

			BE
1	**a**	$\frac{k(13)-1{,}44}{1{,}44} \approx -0{,}028$, d. h. die Abweichung beträgt etwa 2,8 %.	2
	b	 Ab $12\,\frac{km}{h}$ steigt die Laktatkonzentration an, bei $15\,\frac{km}{h}$ überschreitet die Laktatkonzentration $3{,}25\,\frac{mmol}{l}$.	2
	c	$k'(x)=\frac{1}{40}\cdot\left(3x^2-60x+288\right)$, $k''(x)=\frac{1}{40}\cdot(6x-60)=0 \Leftrightarrow x=10$ Unter Berücksichtigung des Graphen von k ergibt sich, dass die Laktatkonzentration bei $10\,\frac{km}{h}$ am stärksten abnimmt.	4
	d	$\frac{k(17{,}5)-k(12)}{17{,}5-12} \approx 1{,}6$, d. h. die mittlere Änderungsrate beträgt etwa $1{,}6\,\frac{mmol}{l}$ pro $\frac{km}{h}$.	3
2	**a**	$k'(10)=-0{,}3$ Unter Berücksichtigung des Graphen von k ergibt sich: $\left]-\infty;-0{,}3\right]$	3
	b	Die Gleichung der Gerade hat die Form $y=m\cdot x+n$. Damit: $\frac{13}{8}=m\cdot 10+n \Leftrightarrow n=-10m+\frac{13}{8}$	2
	c	 $\frac{13}{40}\cdot(10-5)=\frac{13}{8}$	3

	d	Die Lösungen der Gleichung sind die x-Koordinaten der Schnittpunkte der Graphen von k und g. Lösungen: $x_1 = 5$, $x_2 = 10$, $x_3 = 15$	3
	e	Aufgrund der Symmetrie des Graphen von k bezüglich des Punkts W haben die beiden Flächenstücke, die der Graph von k mit dem Graphen von g einschließt, den gleichen Inhalt. Folglich stimmt der Inhalt der Fläche, die der Graph von k mit der x-Achse und der Gerade mit der Gleichung $x = 15$ einschließt, mit dem Inhalt der Fläche überein, die der Graph von g mit der x-Achse und der Gerade mit der Gleichung $x = 15$ einschließt. Diese Fläche hat die Form eines rechtwinkligen Dreiecks, dessen Katheten die Längen $(15-5)$ und $k(15)$ haben.	4
	f	Die Funktionswerte von k sind für $x < 5$ negativ und für $x > 5$ positiv. Damit ist der Wert des Integrals für $z = 4$ negativ und für $z = 5$ positiv. Für $4 \leq z \leq 5$ nimmt der Wert des Integrals mit zunehmendem Wert von z kontinuierlich zu.	3
3	a	Der Graph von h geht aus dem Graphen von i hervor durch: ♦ Verschiebung um 5 in positive x-Richtung ♦ Streckung mit dem Faktor $\frac{40}{13}$ in y-Richtung	2
	b	$g(x) = h(x) \Leftrightarrow (x-5)^2 = \left(\frac{40}{13}\right)^2 \Leftrightarrow x = \frac{25}{13} \vee x = \frac{105}{13}$ Damit: $\left(\frac{25}{13} \mid -1\right)$, $\left(\frac{105}{13} \mid 1\right)$	4
	c	Für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{5\}$ ist die Steigung des Graphen von h negativ, die des Graphen von g positiv.	2
	d	$a = 1$, $b = 3$, $c = 9$, $d = 6$ Für die angegebenen Werte sind die Werte beider Integrale negativ.	3
			40

3 Standardbezug

Teilaufgabe	BE	allgemeine mathematische Kompetenzen						Anforderungsbereich		
		K1	K2	K3	K4	K5	K6	I	II	III
1 a	2			I	I	I		X		
b	2			I	I		I	X		
c	4	I		II		II			X	
d	3			I		I		X		
2 a	3	III	III		II					X
b	2		II			I			X	
c	3	I			I	I		X		
d	3	I			I		I	X		
e	4	III	III		II					X
f	3	II			I		II		X	

3 a	2	II			II		I		X	
b	4					II			X	
c	2	II	II				II		X	
d	3	II	III			II				X

4 Bewertungshinweise

Die Bewertung der erbrachten Prüfungsleistungen hat sich für jede Teilaufgabe nach der am rechten Rand der Aufgabenstellung angegebenen Anzahl maximal erreichbarer Bewertungseinheiten (BE) zu richten.

Für die Bewertung der Gesamtleistung eines Prüflings ist ein Bewertungsraster[2] vorgesehen, das angibt, wie die in den Prüfungsteilen A und B insgesamt erreichten Bewertungseinheiten in Notenpunkte umgesetzt werden.

[2] Das Bewertungsraster ist Teil des Dokuments „Beschreibung der Struktur“, das auf den Internetseiten des IQB zum Download bereitsteht.