Gemeinsame Abituraufgabenpools der Länder

Pool für das Jahr 2019

Aufgaben für das Fach Mathematik

Kurzbeschreibung

Anforderungsniveau	Prüfungsteil	Sachgebiet[1]	digitales Hilfsmittel
grundlegend	B	Analysis	CAS

1 Aufgabe

BE

Im Rahmen eines Unterrichtsprojekts wurden unterschiedliche Kugelbahnkörper gefertigt und hinsichtlich ihrer Eigenschaften untersucht. Zwei dieser Bahnkörper sind in Abbildung 1 schematisch dargestellt.

Im Längsschnitt jeder der Bahnen F und G

- kann die Profillinie der Bahn modellhaft mithilfe einer Funktion beschrieben werden;
- wird der Startpunkt, von dem aus die Kugel die Bahn durchläuft, durch den Punkt $S(0|2)$ dargestellt, der Endpunkt durch den Punkt $E\left(2\,|\,\frac{1}{2}\right)$.

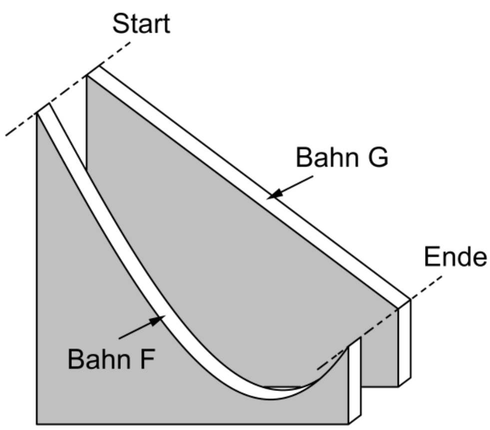


Abb. 1

Der horizontale Untergrund, auf dem die beiden Bahnkörper stehen, wird jeweils durch die x-Achse beschrieben; eine Längeneinheit im Koordinatensystem entspricht einem Meter in der Wirklichkeit.

Die Beschreibung der Profillinie der Bahn F erfolgt mithilfe der in IR definierten Funktion $f: x \mapsto \frac{3}{11}x^3 - \frac{81}{44}x + 2$.

a Zeigen Sie rechnerisch, dass der tiefste Punkt der Bahn F unterhalb ihres Endpunkts liegt. 2

[1] verwendete Abkürzungen: AG/LA (A1) - Analytische Geometrie/Lineare Algebra (Alternative A1), AG/LA (A2) - Analytische Geometrie/Lineare Algebra (Alternative A2)

b Im fallenden Abschnitt der Bahn F gibt es einen Punkt, der auf der Höhe des Endpunkts liegt. Bestimmen Sie für diesen Punkt den Abstand vom Endpunkt. 2

c Bestimmen Sie die Lage desjenigen Punkts der Bahn F, in dem diese das größte Gefälle hat. 2

d Zeichnen Sie den Graphen von f für $0 \leq x \leq 2$. 2

Die Bahn G verläuft gerade. Die Beschreibung ihrer Profillinie erfolgt mithilfe einer Funktion g.

e Zeichnen Sie den Graphen von g für $0 \leq x \leq 2$ in das Koordinatensystem aus Teilaufgabe d ein und zeigen Sie, dass $g(x) = -\frac{3}{4}x + 2$ gilt. 2

f Betrachtet werden alle Paare eines Punkts der Bahn F und eines Punkts der Bahn G, die die gleiche horizontale Entfernung vom jeweiligen Startpunkt haben. Für jedes dieser Paare kann der Höhenunterschied der beiden Punkte bestimmt werden. Beurteilen Sie die folgende Aussage: 4

Der Höhenunterschied ist für das Paar derjenigen Punkte am größten, in denen die beiden Bahnen das gleiche Gefälle haben.

Die Körper der Bahnen F und G wurden von einem einzigen massiven Kunststoffquader mit den Seitenlängen 200 cm, 250 cm und 10 cm abgeschnitten (vgl. Abbildung 2).

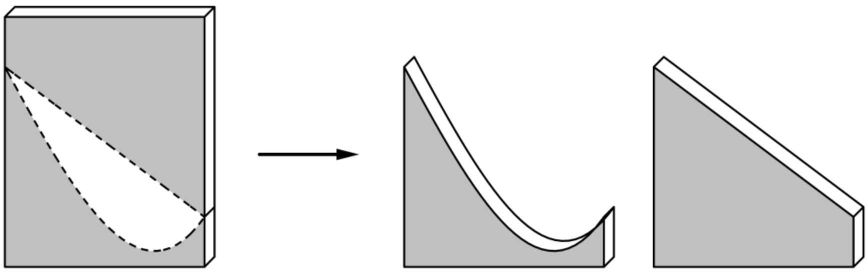


Abb. 2

g Berechnen Sie auf der Grundlage des Modells den prozentualen Anteil desjenigen Teils des Kunststoffquaders, der nach dem Abschneiden der beiden Bahnkörper übrig bleibt. 5

h Betrachtet wird diejenige Seitenfläche des Körpers der Bahn G, die in den Abbildungen 1 und 2 grau markiert ist; ihr oberer Rand hat die Form der Profillinie. An dieser Seitenfläche soll ein rechteckiges Schild angebracht werden. Dabei soll eine Kante des Schilds auf der längeren seitlichen Kante der Seitenfläche liegen, eine zweite Kante des Schilds auf der unteren Kante der Seitenfläche und ein Eckpunkt des Schilds auf dem oberen Rand der Seitenfläche. 5

Stellen Sie ein Schild, das diese Bedingungen erfüllt, im Koordinatensystem aus Teilaufgabe d dar. Bestimmen Sie die Seitenlängen des Schilds so, dass dieses den größtmöglichen Flächeninhalt hat.

Für jede der Bahnen F und G wurde in bestimmten horizontalen Entfernungen vom Startpunkt jeweils die Geschwindigkeit der Kugel gemessen. Die Messwerte können der Tabelle entnommen werden:

Entfernung in m		0	1,0	1,5	2,0
Geschwindigkeit in $\frac{m}{s}$	Messwerte I	0	3,6	4,4	5,1
	Messwerte II	0	5,2	5,6	5,1

i Ordnen Sie die Messwerte I und II jeweils einer der beiden Bahnen zu und begründen Sie Ihre Zuordnung. 2

j Aufgrund der Messwerte lässt sich vermuten, dass die Geschwindigkeit der Kugel auf der Bahn, für die die Messwerte II ermittelt wurden, in jedem Punkt mindestens so groß war wie in gleicher horizontaler Entfernung vom Startpunkt auf der anderen Bahn. Der Zusammenhang zwischen den Messwerten und den horizontalen Entfernungen vom Startpunkt kann jeweils modellhaft durch eine Gleichung beschrieben werden: 6

Messwerte I: $v_I(x) = \sqrt{m \cdot x}$

Messwerte II: $v_{II}(x) = \sqrt{a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d}$

Bestimmen Sie die Werte von m sowie von a, b, c und d. Prüfen Sie, ob die beiden Modelle zu den Messwerten I und II die Vermutung stützen.

Die Profillinie einer weiteren Bahn H kann durch die Funktion $h: x \mapsto 2 - \sqrt{\frac{25}{8}x - x^2}$ mit $x \in [0;2]$ beschrieben werden. Abbildung 3 zeigt den Graphen von h sowie den Punkt $M\left(\frac{25}{16} \middle| 2\right)$.

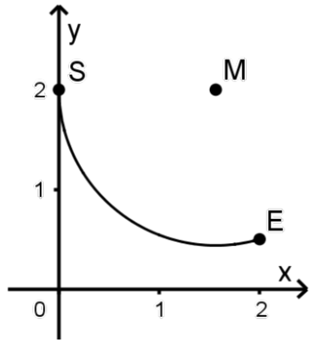


Abb. 3

k Für alle Punkte $(x|h(x))$ des Graphen von h gilt: 4

$$\left(\frac{25}{16} - x\right)^2 + (2 - h(x))^2 = \left(\frac{25}{16}\right)^2$$

Begründen Sie damit, dass alle Punkte des Graphen von h vom Punkt M den Abstand $\frac{25}{16}$ haben.

l Die drei folgenden Rechenschritte liefern im Zusammenhang mit der Bahn H die Lösung einer Aufgabe: 4

- $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{25}{16} \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{25}{16} \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{25}{16} \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{7}{16} \\ -\frac{3}{2} \end{pmatrix}$

- $\cos\alpha = \dfrac{\begin{pmatrix} -\frac{25}{16} \\ 0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} \frac{7}{16} \\ -\frac{3}{2} \end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix} -\frac{25}{16} \\ 0 \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} \frac{7}{16} \\ -\frac{3}{2} \end{pmatrix}\right|}$

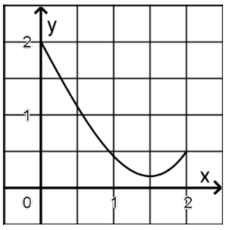
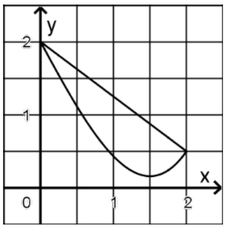
- $\frac{\alpha}{360°} \cdot 2\pi \cdot \frac{25}{16} \approx 2{,}9$

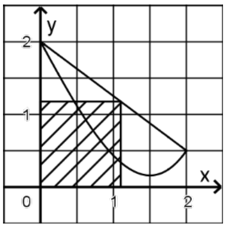
Formulieren Sie die zugehörige Aufgabenstellung und erläutern Sie den dargestellten Lösungsweg.

40

2 Erwartungshorizont

Der Erwartungshorizont stellt für jede Teilaufgabe eine mögliche Lösung dar. Nicht dargestellte korrekte Lösungen sind als gleichwertig zu akzeptieren.

		BE
a	$f\left(\frac{7}{4}\right) = \frac{169}{704} < 0{,}5$, d. h. es gibt einen Punkt der Bahn F, der unterhalb ihres Endpunkts liegt. Damit gilt dies auch für ihren tiefsten Punkt.	2
b	Für $x \geq 0$ liefert $f(x) = \frac{1}{2}$ neben $x_1 = 2$ die Lösung $x_2 \approx 0{,}94$. Damit beträgt der gesuchte Abstand etwa 1,06 m.	2
c	$f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$, d. h. die Bahn hat im Startpunkt das größte Gefälle.	2
d		2
e	 $g(0) = 2$, $\frac{0{,}5-2}{2} = -\frac{3}{4}$	2
f	Die Aussage ist richtig. Begründung: Für $0 \leq x \leq 2$ ♦ hat die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion d mit $d(x) = g(x) - f(x)$ bei $x = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ den größten Wert; ♦ gilt $f'(x) = -\frac{3}{4} \Leftrightarrow x = \frac{2\sqrt{3}}{3}$.	4
g	$\frac{\int_0^2 (g(x) - f(x))\,dx}{2 \cdot 2{,}5} \approx 22\,\%$	5

h	 Der Flächeninhalt des Rechtecks, das das Schild darstellt, lässt sich in Abhängigkeit von seiner Breite x durch eine Funktion A mit $A(x)=x\cdot g(x)$ beschreiben. Es gilt: $A'(x)=0 \Leftrightarrow x=\frac{4}{3}$, $A''\left(\frac{4}{3}\right)<0$, $g\left(\frac{4}{3}\right)=1$ Die Seitenlängen sind etwa 1,33 m und 1,00 m.	5
i	Die Messwerte I gehören zur Bahn G, da hier die Geschwindigkeiten aufgrund des zunächst geringeren Gefälles langsamer zunehmen als bei der Bahn F, die Messwerte II entsprechend zur Bahn F.	2
j	$v_I(1)=3{,}6$ liefert $m\approx 13$. $v_{II}(0)=0$, $v_{II}(1)=5{,}2$, $v_{II}(1{,}5)=5{,}6$ und $v_{II}(2)=5{,}1$ liefern $a\approx -3{,}5$, $b\approx -3{,}4$, $c\approx 34{,}0$ und $d=0$. Für $0\le x\le 2$ gilt $v_{II}(x)\ge v_I(x)$, d. h. die beiden Modelle stützen die Vermutung.	6
k	$\left(\frac{25}{16}-x\right)$ ist die Differenz der x-Koordinaten von M und $(x\,\|\,h(x))$, $(2-h(x))$ die Differenz der y-Koordinaten. Damit ist $\left(\frac{25}{16}-x\right)^2+(2-h(x))^2$ das Quadrat des Abstands der beiden Punkte. Stimmt dieser Wert unabhängig von x mit $\left(\frac{25}{16}\right)^2$ überein, so haben alle Punkte des Graphen von h vom Punkt M den Abstand $\frac{25}{16}$.	4
l	Aufgabenstellung: Berechnen Sie die Länge der Bahn H. Die beiden ersten Rechenschritte liefern die Größe des Winkels, den $\overline{MS}$ und $\overline{ME}$ einschließen. Aus dem dritten Rechenschritt ergibt sich die Länge des in Abbildung 3 gezeigten Kreisbogens.	4
		40

3 Standardbezug

Teilaufgabe	BE	allgemeine mathematische Kompetenzen						Anforderungsbereich		
		K1	K2	K3	K4	K5	K6	I	II	III
a	2	I				I	I	X		
b	2		I	I		I		X		
c	2			I		I		X		
d	2				I			X		
e	2		I		I	I		X		
f	4	II		II		II			X	
g	5		II	II		II			X	
h	5		II		II	II			X	
i	2	I			I		I	X		
j	6			II	II	II			X	
k	4	III			II		II			X

4 Bewertungshinweise

Die Bewertung der erbrachten Prüfungsleistungen hat sich für jede Teilaufgabe nach der am rechten Rand der Aufgabenstellung angegebenen Anzahl maximal erreichbarer Bewertungseinheiten (BE) zu richten.

Für die Bewertung der Gesamtleistung eines Prüflings ist ein Bewertungsraster[2] vorgesehen, das angibt, wie die in den Prüfungsteilen A und B insgesamt erreichten Bewertungseinheiten in Notenpunkte umgesetzt werden.

[2] Das Bewertungsraster ist Teil des Dokuments „Beschreibung der Struktur“, das auf den Internetseiten des IQB zum Download bereitsteht.