

Gemeinsame Abituraufgabenpools der Länder

Pool für das Jahr 2019

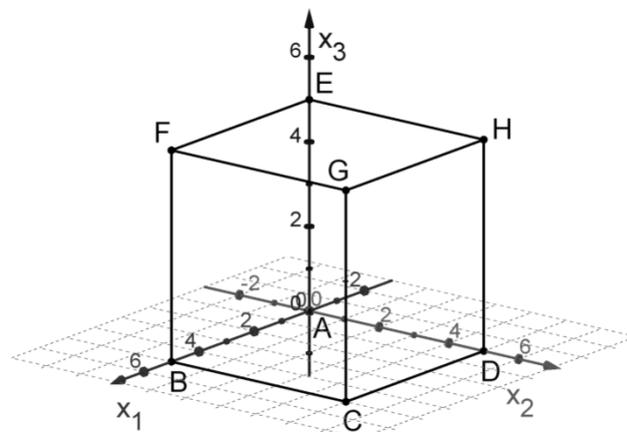
Aufgaben für das Fach Mathematik

Kurzbeschreibung

Anforderungsniveau	Prüfungsteil	Sachgebiet ¹	digitales Hilfsmittel
grundlegend	B	AG/LA (A2)	WTR

1 Aufgabe

Die Abbildung zeigt den Würfel ABCDEFGH mit $G(5|5|5)$ und $H(0|5|5)$ in einem kartesischen Koordinatensystem. Die Punkte $I(5|0|1)$, $J(2|5|0)$, $K(0|5|2)$ und $L(1|0|5)$ liegen jeweils auf einer Kante des Würfels.



- | | |
|--|---|
| a Zeichnen Sie das Viereck IJKL in die Abbildung ein. | 2 |
| b Zeigen Sie, dass das Viereck IJKL ein Trapez ist, in dem zwei gegenüberliegende Seiten gleich lang sind. Weisen Sie nach, dass die Seite \overline{IL} des Trapezes doppelt so lang ist wie die Seite \overline{JK} . | 4 |
| c Berechnen Sie die Größe eines Innenwinkels des Trapezes IJKL. | 2 |
| d Berechnen Sie den Flächeninhalt des Trapezes IJKL. | 4 |
| e Gegeben ist die Ebene $S: 5x_1 + 4x_2 + 5x_3 = 0$. Der Punkt K liegt in einer Ebene T, die parallel zu S ist. Untersuchen Sie, ob auch der Punkt L in T liegt. | 3 |

¹ verwendete Abkürzungen: AG/LA (A1) - Analytische Geometrie/Lineare Algebra (Alternative A1),
AG/LA (A2) - Analytische Geometrie/Lineare Algebra (Alternative A2)

- f Für einen Wert von r schneidet die Gerade $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4-r \\ 0 \\ r^2+1 \end{pmatrix} + u \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix}$ mit $u \in \mathbb{R}$ die Kante \overline{GH} des Würfels. Bestimmen Sie das Verhältnis, in dem der Schnittpunkt die Kante teilt.

5

20

2 Erwartungshorizont

Der Erwartungshorizont stellt für jede Teilaufgabe eine mögliche Lösung dar. Nicht dargestellte korrekte Lösungen sind als gleichwertig zu akzeptieren.

	BE
<p>a</p>	2
<p>b</p> $\vec{IL} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = 2 \cdot \vec{JK}, \text{ d. h. } \vec{IL} \text{ ist doppelt so lang wie } \vec{JK} \text{ und die beiden Seiten sind parallel zueinander. Zudem gilt } \vec{J} = \sqrt{3^2 + 5^2 + 1^2} = \vec{KL} .$	4
<p>c</p> <p>Der Innenwinkel mit dem Scheitel L wird mit φ bezeichnet.</p> $\cos \varphi = \frac{\begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}}{\left \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix} \right \cdot \left \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} \right } = \frac{8}{\sqrt{1120}} \text{ liefert } \varphi \approx 76^\circ.$	2
<p>d</p> <p>Aufgrund der Symmetrie des Trapezes ist die Länge seiner Höhe der Abstand der Mittelpunkte der Seiten \vec{IL} bzw. \vec{JK}, d. h. der Abstand von $(3 0 3)$ und $(1 5 1)$. Damit gilt für den Flächeninhalt: $\frac{1}{2} \cdot (\vec{IL} + \vec{JK}) \cdot \sqrt{2^2 + 5^2 + 2^2} = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot \sqrt{8} \cdot \sqrt{33} = 3\sqrt{66}$</p>	4
<p>e</p> <p>Die Gleichung von T hat die Form $5x_1 + 4x_2 + 5x_3 + v = 0$. Es gilt $K \in T \Leftrightarrow 5 \cdot 0 + 4 \cdot 5 + 5 \cdot 2 + v = 0 \Leftrightarrow v = -30$. Wegen $5 \cdot 1 + 4 \cdot 0 + 5 \cdot 5 - 30 = 0$ liegt auch L in T.</p>	3

f	<p>Gerade durch G und H: $\vec{x} = \overline{AG} + w \cdot \overline{GH} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix} + w \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $w \in \mathbb{R}$</p> <p>$\begin{pmatrix} 4-r \\ 0 \\ r^2+1 \end{pmatrix} + u \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix} + w \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ liefert das folgende Gleichungssystem:</p> <p style="text-align: center;">I $4-r+4u=5-5w$ II $-5u=5$ III $r^2+1=5$</p> <p>II und III liefern $u = -1$ bzw. $r = -2 \vee r = 2$. Aus I ergibt sich damit $w = \frac{3}{5}$ bzw. $w = \frac{7}{5}$. Nur für $w = \frac{3}{5}$ liegt der Schnittpunkt auf \overline{GH}. Damit wird \overline{GH} im Verhältnis 3 : 2 geteilt.</p>	5
		20

3 Standardbezug

Teilaufgabe	BE	allgemeine mathematische Kompetenzen						Anforderungsbereich		
		K1	K2	K3	K4	K5	K6	I	II	III
a	2				I			X		
b	4	I	I			I		X		
c	2					II			X	
d	4		II			I	II		X	
e	3		II		I	II			X	
f	5	II	III			II				X

4 Bewertungshinweise

Die Bewertung der erbrachten Prüfungsleistungen hat sich für jede Teilaufgabe nach der am rechten Rand der Aufgabenstellung angegebenen Anzahl maximal erreichbarer Bewertungseinheiten (BE) zu richten.

Für die Bewertung der Gesamtleistung eines Prüflings ist ein Bewertungsraster² vorgesehen, das angibt, wie die in den Prüfungsteilen A und B insgesamt erreichten Bewertungseinheiten in Notenpunkte umgesetzt werden.

² Das Bewertungsraster ist Teil des Dokuments „Beschreibung der Struktur“, das auf den Internetseiten des IQB zum Download bereitsteht.