Gemeinsame Abituraufgabenpools der Länder

Pool für das Jahr 2019

Aufgaben für das Fach Mathematik

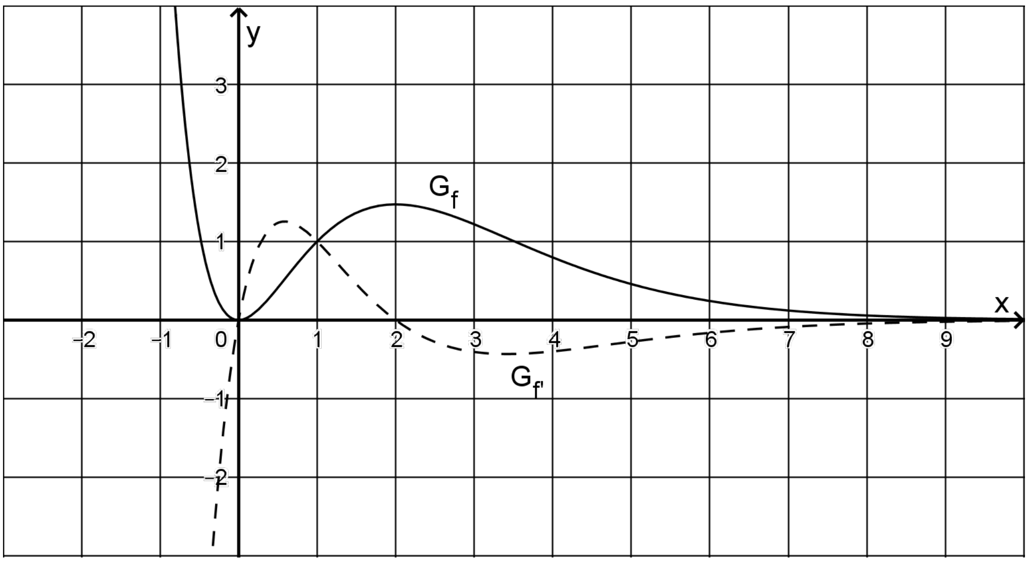
Kurzbeschreibung

Anforderungsniveau	Prüfungsteil	Sachgebiet[1]	digitales Hilfsmittel
erhöht	B	Analysis	WTR

1 Aufgabe

BE

Die Abbildung zeigt den Graphen G_f der in $\mathbb{R}$ definierten Funktion $f: x \mapsto x^2 \cdot e^{1-x}$ sowie den Graphen $G_{f'}$ der zugehörigen ersten Ableitungsfunktion f'.



1 a Beschreiben Sie die Eigenschaft von — 4

- $G_{f'}$, aus der sich folgern lässt, dass G_f bei $x = 0$ einen Tiefpunkt hat.
- G_f, aus der sich folgern lässt, dass $G_{f'}$ bei $x = 0{,}6$ einen Hochpunkt hat.

[1] verwendete Abkürzungen: AG/LA (A1) - Analytische Geometrie/Lineare Algebra (Alternative A1), AG/LA (A2) - Analytische Geometrie/Lineare Algebra (Alternative A2)

b Weisen Sie nach, dass $F(x) = -\left(x^2 + 2x + 2\right) \cdot e^{1-x}$ ein Term einer Stammfunktion von f ist. Bestimmen Sie einen Term derjenigen Stammfunktion von f, deren Graph durch den Punkt $(1|-3)$ verläuft. 5

Der Graph von f beschreibt modellhaft die 7,5 Sekunden dauernde Fahrt eines Lastenaufzugs. Dabei ist x die seit Beginn der Fahrt vergangene Zeit in Sekunden und y die Geschwindigkeit des Aufzugs in Meter pro Sekunde.

c Entnehmen Sie der Abbildung die größte Geschwindigkeit des Aufzugs und geben Sie diese an. 1

d Bestimmen Sie grafisch den Zeitraum, in dem die Geschwindigkeit mindestens $1{,}0\,\frac{m}{s}$ beträgt. 2

e Berechnen Sie für den Zeitraum von 2,0 s bis 4,0 s nach Beginn der Fahrt die mittlere Änderung der Geschwindigkeit. 3

f Geben Sie die Bedeutung der unterschiedlichen Vorzeichen von $f'(x)$ im Sachzusammenhang an. 2

g Der Wert des Terms $\int_0^{7{,}5} f(x)\,dx$ kann als Länge der vom Aufzug zurückgelegten Strecke interpretiert werden. Berechnen Sie diese Länge. 2

h Beurteilen Sie die Eignung des für die Fahrt des Aufzugs verwendeten Modells im Hinblick auf das Ende der Fahrt. 2

i Begründen Sie, dass die folgende Aussage richtig ist: 4

Würde der Graph von f die Fahrt eines Aufzugs beschreiben, die länger als 7,5 Sekunden dauert, so wäre die von diesem Aufzug zurückgelegte Strecke – unabhängig von der Dauer seiner Fahrt – kürzer als 5,5 m.

Das für die 7,5 Sekunden dauernde Fahrt des Aufzugs bisher verwendete Modell wird geändert: Für $0 \leq x \leq 6$ wird die Fahrt weiterhin durch G_f, für $x \geq 6$ jedoch mithilfe der Tangente an G_f im Punkt $(6\,|\,f(6))$ beschrieben.

j Begründen Sie ohne weitere Rechnung mithilfe des Graphen von f', dass die Tangente an G_f im Punkt $(6\,|\,f(6))$ den Graphen von f für $x > 6$ nicht schneidet. 3

k Zeigen Sie rechnerisch, dass der Aufzug im geänderten Modell nach 7,5 Sekunden tatsächlich zum Stehen kommt. 5

l Der Aufzug legt im geänderten Modell während der gesamten Fahrtzeit von 7,5 Sekunden eine bestimmte Strecke zurück. Beschreiben Sie, wie man denjenigen Zeitpunkt berechnen könnte, bis zu dem der Aufzug diese Strecke im ursprünglichen Modell zurücklegt. 4

2 Betrachtet wird die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion $h: x \mapsto 1 + 2 \cdot (x-1)^2 \cdot e^{2-x}$.

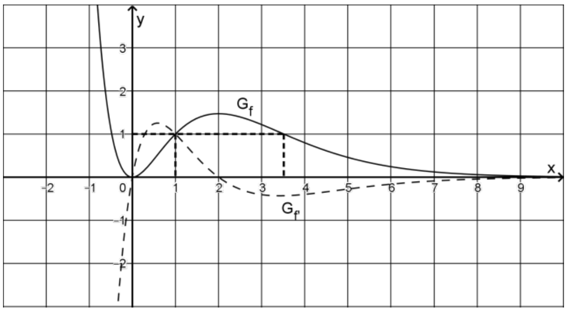
a Begründen Sie, dass h keine Nullstelle besitzt. 2

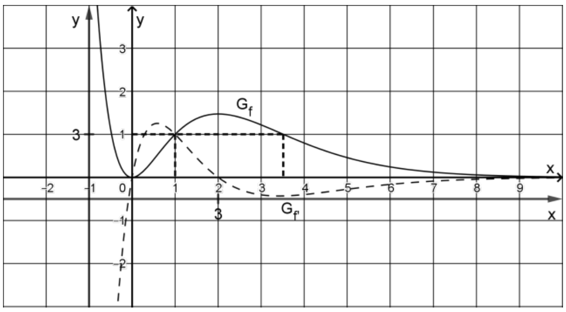
b Es gilt $h(x) = 1 + 2 \cdot f(x-1)$. Beschreiben Sie, wie der Graph von h schrittweise aus dem in der Abbildung gezeigten Graphen von f erzeugt werden kann. Begründen Sie, dass dabei die Reihenfolge der Schritte nicht beliebig ist. 5

c In der Abbildung stellt eine der beiden Kurven die Funktion f dar. Zeichnen Sie in die Abbildung ein Koordinatensystem ein, in dem diese Kurve die Funktion h darstellt.	3
d Geben Sie einen Term einer Stammfunktion von h an.	3
	50

2 Erwartungshorizont

Der Erwartungshorizont stellt für jede Teilaufgabe eine mögliche Lösung dar. Nicht dargestellte korrekte Lösungen sind als gleichwertig zu akzeptieren.

			BE
1	**a**	♦ Es gibt Werte $x_1 < 0$ und $x_2 > 0$, für die $G_{f'}$ für $x_1 < x < 0$ unterhalb der x-Achse und für $0 < x < x_2$ oberhalb verläuft. ♦ Es gibt Werte $x_3 < 0{,}6$ und $x_4 > 0{,}6$, für die G_f für $x_3 < x < 0{,}6$ linksgekrümmt und für $0{,}6 < x < x_4$ rechtsgekrümmt ist.	4
	b	$F'(x) = -(2x+2)\cdot e^{1-x} - (x^2+2x+2)\cdot e^{1-x}\cdot(-1) = (-2x-2+x^2+2x+2)\cdot e^{1-x}$ $= x^2\cdot e^{1-x} = f(x)$ Der Term der gesuchten Stammfunktion hat die Form $F(x)+c$. $F(1)+c=-3 \Leftrightarrow c=2$	5
	c	$1{,}5\,\frac{m}{s}$	1
	d	 Der Zeitraum liegt zwischen 1,0 s und 3,5 s nach Beginn der Fahrt.	2
	e	$\frac{f(4)-f(2)}{2} \approx -0{,}34$, d. h. die Geschwindigkeit nimmt im betrachteten Zeitraum pro Sekunde um etwa $0{,}34\,\frac{m}{s}$ ab.	3
	f	Sind die Werte von $f'(x)$ positiv, so nimmt die Geschwindigkeit des Aufzugs zu, sind die Werte von $f'(x)$ negativ, so nimmt die Geschwindigkeit ab.	2
	g	$\int_0^{7{,}5} f(x)\,dx = F(7{,}5)-F(0) \approx 5{,}3$ Die Länge der zurückgelegten Strecke beträgt etwa 5,3 m.	2
	h	$f(7{,}5) > 0$, d. h. das Modell ist zur Beschreibung des Endes der Fahrt nicht geeignet, da das Stehenbleiben des Aufzugs nicht korrekt beschrieben wird.	2

	i	Für $r > 7{,}5$ gilt: $\int_0^r f(x)\,dx = F(r) - F(0) = -\left(r^2 + 2r + 2\right) \cdot e^{1-r} + 2e < 2e < 5{,}5$	4
	j	Für $x > 5$ ist $G_{f'}$ steigend, G_f also linksgekrümmt. Damit schneidet die Tangente den Graphen von f für $x > 6$ nicht.	3
	k	$f'(x) = 2x \cdot e^{1-x} + x^2 \cdot e^{1-x} \cdot (-1)$, $f'(6) = -\frac{24}{e^5}$, $f(6) = \frac{36}{e^5}$ Damit: $\frac{-f(6)}{x-6} = f'(6) \Leftrightarrow x = \frac{-f(6)}{f'(6)} + 6 = 7{,}5$	5
	l	Man berechnet den Inhalt A der Fläche, die die Tangente an G_f im Punkt $(6 \mid f(6))$ mit der Gerade mit der Gleichung $x = 6$ und der x-Achse einschließt. Bezeichnet man den gesuchten Zeitpunkt mit t, so ergibt sich der Wert von t als Lösung der Gleichung $\int_6^t f(x)\,dx = A$.	4
2	a	Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt $(x-1)^2 \geq 0$ und $e^{2-x} > 0$, d. h. $h(x) \geq 1$.	2
	b	Der Graph von h geht aus dem Graphen von f hervor durch: ♦ Verschiebung um 1 in positive x-Richtung ♦ Streckung mit dem Faktor 2 in y-Richtung ♦ Verschiebung um 1 in positive y-Richtung Der Graph von f enthält den Punkt $(0 \mid 0)$. Würde man den zweiten und dritten Schritt vertauschen, so enthielte der so erzeugte Graph den Punkt $(1 \mid 2)$. Dieser liegt wegen $h(1) \neq 2$ nicht auf dem Graphen von h.	5
	c		3
	d	$x + 2 \cdot F(x-1)$	3
			50

3 Standardbezug

Teilaufgabe	BE	allgemeine mathematische Kompetenzen						Anforderungsbereich		
		K1	K2	K3	K4	K5	K6	I	II	III
1 a	4	II			II		II		X	
b	5		II			II			X	

c	1			I	I		I	X		
d	2		I	I	I			X		
e	3			I		I		X		
f	2			I			I	X		
g	2					I		X		
h	2	II		II			II		X	
i	4	II	III			III				X
j	3	II			II		I		X	
k	5		II	I		II			X	
l	4		III	III			II			X
2 a	2	I	I			I		X		
b	5	II			II		II		X	
c	3	II	III		III					X
d	3		III		II	III				X

4 Bewertungshinweise

Die Bewertung der erbrachten Prüfungsleistungen hat sich für jede Teilaufgabe nach der am rechten Rand der Aufgabenstellung angegebenen Anzahl maximal erreichbarer Bewertungseinheiten (BE) zu richten.

Für die Bewertung der Gesamtleistung eines Prüflings ist ein Bewertungsraster[2] vorgesehen, das angibt, wie die in den Prüfungsteilen A und B insgesamt erreichten Bewertungseinheiten in Notenpunkte umgesetzt werden.

[2] Das Bewertungsraster ist Teil des Dokuments „Beschreibung der Struktur“, das auf den Internetseiten des IQB zum Download bereitsteht.