Gemeinsame Abituraufgabenpools der Länder

Pool für das Jahr 2019

Aufgaben für das Fach Mathematik

Kurzbeschreibung

Anforderungsniveau	Prüfungsteil	Sachgebiet[1]	digitales Hilfsmittel
erhöht	B	Analysis	CAS

1 Aufgabe

BE

1 Ein Staubecken, das insgesamt $100\,000\,\text{m}^3$ Wasser aufnehmen kann, enthielt um 12:00 Uhr eines bestimmten Tages $88\,000\,\text{m}^3$ Wasser. Der Tabelle können Zufluss- und Abflussraten entnommen werden, die an diesem Tag zu bestimmten Zeitpunkten für das Wasser im Becken gemessen wurden:

Uhrzeit	12:00	13:00	14:00	15:00	16:00	17:00	18:00
Zuflussrate in $1000\,\frac{\text{m}^3}{\text{h}}$	4,07	5,56	7,30	5,04	1,75	0,38	0,46
Abflussrate in $1000\,\frac{\text{m}^3}{\text{h}}$	1,02	0,98	3,50	5,00	5,50	5,00	3,50

Die zeitliche Entwicklung der momentanen Änderungsrate des Volumens des Wassers im Becken kann für den Zeitraum von 12:00 Uhr bis 18:00 Uhr modellhaft mithilfe der in $\mathbb{R}$ definierten Funktion f mit $f(x)=(3-x)\cdot e^{-\frac{1}{6}x^2+x}$ beschrieben werden. Dabei ist x die seit 12:00 Uhr vergangene Zeit in Stunden und $f(x)$ die momentane Änderungsrate in $1000\,\frac{\text{m}^3}{\text{h}}$.

a Geben Sie nur anhand der gegebenen Messwerte die beiden betrachteten Zeitpunkte an, zwischen denen das Wasservolumen offenbar durchgehend zunahm. Begründen Sie Ihre Angabe. 2

[1] verwendete Abkürzungen: AG/LA (A1) - Analytische Geometrie/Lineare Algebra (Alternative A1), AG/LA (A2) - Analytische Geometrie/Lineare Algebra (Alternative A2)

b Zeigen Sie, dass die Funktion f für 12:00 Uhr und 16:00 Uhr Änderungsraten liefert, die von den Änderungsraten, die sich für diese Zeitpunkte aus den Messwerten ergeben, um weniger als 2 % abweichen. Bestimmen Sie auf der Grundlage des Modells den Zeitpunkt, zu dem die Änderungsrate $2500\,\frac{m^3}{h}$ betrug. 3

c Geben Sie für den Zeitraum von 12:00 Uhr bis 18:00 Uhr auf der Grundlage des Modells an, 4

- zu welchem Zeitpunkt das Wasservolumen am stärksten zunahm,
- zu welchem Zeitpunkt sich die größte Menge Wasser im Becken befand.

Begründen Sie jeweils Ihre Angabe.

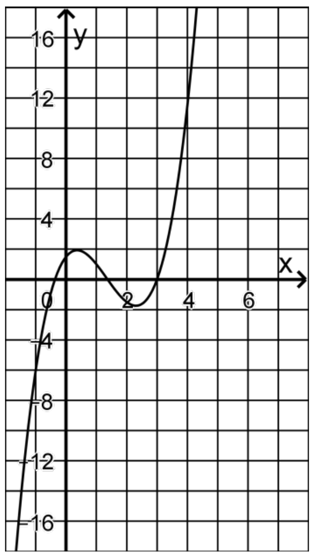
Im verwendeten Modell, in dem x die seit 12:00 Uhr vergangene Zeit in Stunden und $f(x)$ die momentane Änderungsrate des Wasservolumens ist, gilt:

- Für den Zeitraum zwischen 12:00 Uhr und 13:00 Uhr kann die momentane Abflussrate mit $1000\,\frac{m^3}{h}$ als konstant angenommen werden.
- Für den Zeitraum zwischen 13:00 Uhr und 18:00 Uhr lässt sich die zeitliche Entwicklung der momentanen Abflussrate mithilfe der in $\mathbb{R}$ definierten Funktion s mit $s(x) = -0{,}5x^2 + 4x - 2{,}5$ beschreiben. Dabei ist $s(x)$ die momentane Abflussrate in $1000\,\frac{m^3}{h}$.

d Berechnen Sie für den Zeitraum zwischen 12:00 Uhr und 18:00 Uhr auf der Grundlage des Modells, wie viel Wasser aus dem Becken abfloss und wie viel Wasser zufloss. 5

e Bestimmen Sie den Zeitpunkt, zu dem das Aufnahmevermögen des Beckens überschritten worden wäre, wenn sich die momentane Abflussrate von 13:30 Uhr an nicht mehr verändert hätte. 6

2 Gegeben ist die Schar der in $\mathbb{R}$ definierten Funktionen g_t mit $g_t(x) = (x-3) \cdot \left(x^2 - t \cdot x - \frac{t}{2}\right)$ und $t \in \mathbb{R}$. Der Graph von g_t wird mit G_t bezeichnet. Die Abbildung zeigt G_1.



a Geben Sie für G_6 die Koordinaten der Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen sowie die Koordinaten der Extrempunkte an. Skizzieren Sie G_6 in der Abbildung. 5

b Ermitteln Sie die Koordinaten der Punkte, durch die alle Graphen der Schar verlaufen. 4

c Zeigen Sie, dass G_t für jeden Wert von t genau zwei Extrempunkte hat. 4

d Ermitteln Sie alle Werte von t, für die der Wendepunkt von G_t auf einer Koordinatenachse liegt. 4

e Für alle Graphen der Schar wird jeweils die Tangente im Wendepunkt betrachtet. Jede dieser Tangenten schließt mit der x-Achse einen Winkel ein. Bestimmen Sie die Größe des kleinsten dieser Winkel. 5

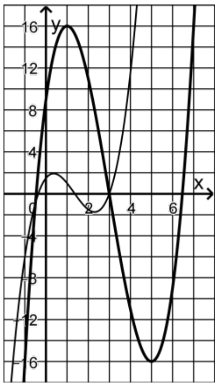
f Geben Sie die Lösungsmenge der Gleichung $g_6(3-x) + g_6(3+x) = 0$ an und beschreiben Sie die geometrische Bedeutung der Gleichung. 3

		BE
g	G_6 schließt für $0 \le x \le 3$ ein Flächenstück mit der x-Achse und der Gerade $x = 0$ ein, für $3 \le x \le 6$ ein Flächenstück mit der x-Achse und der Gerade $x = 6$. Rotieren diese beiden Flächenstücke um die x-Achse, so entstehen zwei Körper. Bestimmen Sie die Volumina der beiden Körper.	2
h	Beurteilen Sie die folgende Aussage: *Rotieren zwei Flächenstücke gleichen Inhalts um die x-Achse, so stimmen die Volumina der beiden entstehenden Körper überein.*	3
		50

2 Erwartungshorizont

Der Erwartungshorizont stellt für jede Teilaufgabe eine mögliche Lösung dar. Nicht dargestellte korrekte Lösungen sind als gleichwertig zu akzeptieren.

			BE
1	**a**	Das Wasservolumen nahm von 12:00 Uhr bis etwa 15:00 Uhr zu, da die Zuflussrate nur in diesem Zeitraum größer war als die Abflussrate.	2
	b	$\left\lvert \frac{f(0)-(4{,}07-1{,}02)}{4{,}07-1{,}02} \right\rvert < 0{,}02$, $\left\lvert \frac{f(4)-(1{,}75-5{,}50)}{1{,}75-5{,}50} \right\rvert < 0{,}02$ Für $x \ge 0$ liefert $f(x) = 2{,}5$ $x \approx 2{,}41$, d. h. um etwa 14:25 Uhr beträgt die Änderungsrate im Modell $2500\,\frac{m^3}{h}$.	3
	c	♦ Da f sein Maximum bei $x \approx 1{,}27$ annimmt, nahm das Wasservolumen um etwa 13:16 Uhr am stärksten zu. ♦ Da $f(x) \ge 0$ für $x \le 3$ und $f(x) \le 0$ für $x \ge 3$, befand sich um 15:00 Uhr am meisten Wasser im Becken.	4
	d	$1000 + 1000 \cdot \int_1^6 s(x)\,dx \approx 22667$, d. h. es flossen etwa $23.000\,m^3$ Wasser ab. $\int_0^6 f(x)\,dx = 0$, das Volumen des Wassers im Becken war um 18:00 Uhr also ebenso groß wie um 12:00 Uhr, d. h. es flossen auch etwa $23.000\,m^3$ Wasser zu.	5
	e	$88000 + 1000 \cdot \int_0^{1{,}5} f(x)\,dx + 1000 \cdot \int_{1{,}5}^{x_0} \left(f(x) + s(x) - s(1{,}5)\right)dx = 100000$ liefert $x_0 \approx 2{,}77$, d. h. das Aufnahmevermögen des Beckens wäre um etwa 14:46 Uhr überschritten worden.	6

2	**a**	Schnittpunkte mit der x-Achse: $\left(3-2\sqrt{3}\,\|\,0\right)$, $\left(3\,\|\,0\right)$, $\left(3+2\sqrt{3}\,\|\,0\right)$ Schnittpunkt mit der y-Achse: $\left(0\,\|\,9\right)$ Extrempunkte: $\left(1\,\|\,16\right)$, $\left(5\,\|\,-16\right)$  	5
	b	$g_{t_1}(x)=g_{t_2}(x) \Leftrightarrow x=-\frac{1}{2} \vee x=3$ Damit: $\left(-\frac{1}{2}\,\|\,-\frac{7}{8}\right)$, $\left(3\,\|\,0\right)$	4
	c	Die Gleichung $g_t'(x)=0$ hat wegen $2t^2-3t+18\neq 0$ für alle $t\in\mathbb{R}$ zwei verschiedene Lösungen x_1 und x_2 mit $g_t''(x_1)\neq 0$ und $g_t''(x_2)\neq 0$.	4
	d	$g_t''(x)=0 \Leftrightarrow x=\frac{1}{3}t+1$ $\frac{1}{3}t+1=0 \Leftrightarrow t=-3$ $g_t\left(\frac{1}{3}t+1\right)=0 \Leftrightarrow t=-\frac{3}{8}\cdot\left(\sqrt{57}+5\right) \vee t=\frac{3}{8}\cdot\left(\sqrt{57}-5\right) \vee t=6$	4
	e	Bezeichnet man die Funktion, die die Steigung von G_t im Wendepunkt beschreibt, mit w, so ergibt sich mit $w(t)=g_t'\left(\frac{1}{3}t+1\right)$: $w'(t)=0 \Leftrightarrow t=\frac{3}{4}$ $\tan\alpha=g_{\frac{3}{4}}'\left(\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{4}+1\right)$ liefert $\alpha\approx-70{,}4°$. Der kleinste Winkel hat eine Größe von etwa 70,4°.	5
	f	Lösungsmenge: $\mathbb{R}$ G_6 ist symmetrisch bezüglich des Punkts $\left(3\,\|\,0\right)$.	3
	g	$\pi\cdot\int_0^3\left(g_6(x)\right)^2 dx=\frac{15471}{35}\pi$, $\pi\cdot\int_3^6\left(g_6(x)\right)^2 dx=\frac{15471}{35}\pi$	2
	h	Die Aussage ist falsch. Begründung: Das Rechteck 1 mit den Eckpunkten $\left(0\,\|\,0\right)$, $\left(2\,\|\,0\right)$, $\left(2\,\|\,1\right)$ und $\left(0\,\|\,1\right)$ und das Rechteck 2 mit den Eckpunkten $\left(0\,\|\,0\right)$, $\left(1\,\|\,0\right)$, $\left(1\,\|\,2\right)$ und $\left(0\,\|\,2\right)$ haben den gleichen Flächeninhalt 2. Die Volumina der zugehörigen Rotationskörper sind mit $1^2\cdot\pi\cdot 2$ bzw. $2^2\cdot\pi\cdot 1$ jedoch verschieden.	3
			50

3 Standardbezug

Teilaufgabe	BE	allgemeine mathematische Kompetenzen						Anforderungsbereich		
		K1	K2	K3	K4	K5	K6	I	II	III
1 a	2	I			I		I	X		
b	3			I		I	I	X		
c	4		II	II		I			X	
d	5		II			II	II		X	
e	6		III	III		III				X
2 a	5				I	I		X		
b	4		I			II			X	
c	4	II				II			X	
d	4	II	II			I			X	
e	5		III			II	III			X
f	3	II	II		II				X	
g	2					I		X		
h	3	III	II				II			X

4 Bewertungshinweise

Die Bewertung der erbrachten Prüfungsleistungen hat sich für jede Teilaufgabe nach der am rechten Rand der Aufgabenstellung angegebenen Anzahl maximal erreichbarer Bewertungseinheiten (BE) zu richten.

Für die Bewertung der Gesamtleistung eines Prüflings ist ein Bewertungsraster[2] vorgesehen, das angibt, wie die in den Prüfungsteilen A und B insgesamt erreichten Bewertungseinheiten in Notenpunkte umgesetzt werden.

[2] Das Bewertungsraster ist Teil des Dokuments „Beschreibung der Struktur“, das auf den Internetseiten des IQB zum Download bereitsteht.