Gemeinsame Abituraufgabenpools der Länder

Pool für das Jahr 2019

Aufgaben für das Fach Mathematik

Kurzbeschreibung

Anforderungsniveau	Prüfungsteil	Sachgebiet[1]	digitales Hilfsmittel
erhöht	B	Analysis	CAS

1 Aufgabe

BE

1 Trinkt man ein koffeinhaltiges Getränk (z. B. Kaffee, Cola, Energydrink), so wird darin enthaltenes Koffein vom Körper ins Blut aufgenommen und dort kontinuierlich wieder abgebaut. Im Folgenden werden der Aufnahmevorgang und der Abbauvorgang zunächst gesondert und erst anschließend gemeinsam untersucht.

Untersuchung des Abbauvorgangs

Zur gesonderten Untersuchung des Abbauvorgangs soll davon ausgegangen werden, dass die Aufnahme von Koffein ins Blut bereits abgeschlossen ist und die Konzentration des Koffeins im Blut innerhalb von jeweils 240 Minuten um die Hälfte abnimmt.

a Ermitteln Sie die Zeitdauer, innerhalb derer die Koffeinkonzentration um 75 % abnimmt. 2

b Unter diesen Voraussetzungen lässt sich die zeitliche Entwicklung der Koffeinkonzentration mithilfe einer in $\mathbb{R}$ definierten Funktion $f: t \mapsto c \cdot e^{a \cdot t}$ mit $a \in \mathbb{R}$ und $c \in \mathbb{R}^+$ beschreiben. Dabei ist $f(t)$ die Koffeinkonzentration in $\frac{\text{mg}}{\text{ml}}$ und t die Zeit in Minuten, die seit Beginn der Beobachtung dieser Konzentration vergangen ist. Begründen Sie, dass c die Koffeinkonzentration zu Beginn der Beobachtung angibt, und bestimmen Sie den passenden Wert von a. 3

Untersuchung des Aufnahmevorgangs

Berücksichtigt man nur den Aufnahmevorgang, lässt also den gleichzeitig erfolgenden Abbau von Koffein außer Acht, so kann die zeitliche Entwicklung der Koffeinkonzent-

[1] verwendete Abkürzungen: AG/LA (A1) - Analytische Geometrie/Lineare Algebra (Alternative A1), AG/LA (A2) - Analytische Geometrie/Lineare Algebra (Alternative A2)

ration mithilfe einer in $\mathbb{R}$ definierten Funktion $g: t \mapsto k \cdot \left(1 - e^{b \cdot t}\right)$ mit $k \in \mathbb{R}^+$ und $b \in \mathbb{R}$ beschrieben werden. Dabei ist $g(t)$ die Koffeinkonzentration in $\frac{\text{mg}}{\text{ml}}$ und t die Zeit in Minuten, die seit Beginn der Beobachtung dieser Konzentration vergangen ist.

Im Folgenden soll angenommen werden, dass die Blutmenge konstant 5 Liter beträgt und insgesamt 100 mg Koffein ins Blut aufgenommen werden.

c Weisen Sie nach, dass $g'(t)$ proportional zur Differenz von k und $g(t)$ ist. 3

d Begründen Sie unter Berücksichtigung des Sachzusammenhangs, dass $b < 0$ gilt. 2

e Geben Sie die Bedeutung von k im Sachzusammenhang an und zeigen Sie, dass $k = 0{,}02$ gilt. 3

f Der folgenden Tabelle können Koffeinkonzentrationen entnommen werden, die sich aus einer Messung ergeben, wenn man den Abbauvorgang außer Acht lässt: 5

seit Beginn der Beobachtung vergangene Zeit in Minuten	0	15	30	45
Koffeinkonzentration in $\frac{\text{mg}}{\text{ml}}$	0	0,0127	0,0173	0,0190

Sollen Messwerte mithilfe einer Funktion möglichst gut beschrieben werden, so wird die Funktion häufig so gewählt, dass die Summe der quadrierten Differenzen der Funktionswerte und der Messwerte möglichst klein ist. In der Abbildung 1 sind Differenzen von Funktionswerten und Messwerten beispielhaft in Form von Strecken veranschaulicht.

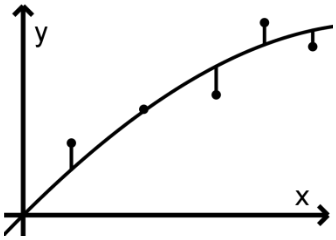


Abb. 1

Geben Sie einen Grund dafür an, dass es bei dieser Methode sinnvoll ist, nicht die Differenzen selbst, sondern deren Quadrate zu verwenden. Bestimmen Sie mithilfe der beschriebenen Methode den passenden Wert von b.

Gemeinsame Untersuchung des Aufnahme- und Abbauvorgangs

Eine Person, in deren Körper kein Koffein enthalten ist, trinkt ein koffeinhaltiges Getränk. Berücksichtigt man nun sowohl den Aufnahmevorgang als auch den Abbauvorgang, so wird die zeitliche Entwicklung der Koffeinkonzentration im Blut mithilfe der in $\mathbb{R}$ definierten Funktion $h: t \mapsto 0{,}010 \cdot e^{-0{,}003 \cdot t} \cdot \left(1 - e^{-0{,}07 \cdot t}\right)$ beschrieben. Dabei ist $h(t)$ die Koffeinkonzentration in $\frac{\text{mg}}{\text{ml}}$ und t die Zeit in Minuten, die seit dem Einsetzen des Aufnahmevorgangs vergangen ist. Die Abbildung 2 zeigt den Graphen von h.

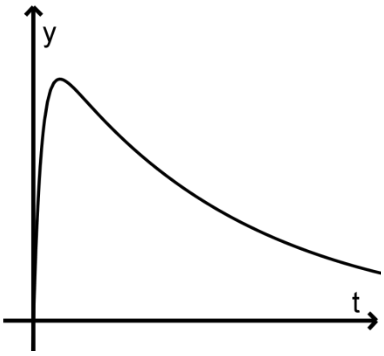


Abb. 2

g Ermitteln Sie den Zeitpunkt, zu dem die höchste Koffeinkonzentration erreicht wird, und geben Sie diese Konzentration an. Bestimmen Sie den Zeitpunkt, zu dem die Koffeinkonzentration am stärksten abnimmt, und veranschaulichen Sie die zugehörige Abnahmerate in der Abbildung 2. 5

h Untersuchen Sie, zu welchem Zeitpunkt die Änderungsrate der Koffeinkonzentration maximal ist, und geben Sie das Maximum an. 4

i Bestimmen Sie mithilfe einer Rechnung die Zeiträume ab dem Einsetzen des Aufnahmevorgangs, in denen die Koffeinkonzentration höchstens $0{,}007\,\frac{\text{mg}}{\text{ml}}$ beträgt. 3

j Berechnen Sie denjenigen Wert von $a \in \mathbb{R}^+$, für den der Inhalt der Fläche, die der Graph von h mit der t-Achse und der Gerade mit der Gleichung $t = a$ einschließt, 0,7 beträgt. Beurteilen Sie die folgende Aussage: 4

Der Inhalt der betrachteten Fläche entspricht der Koffeinmenge, die im zugehörigen Zeitraum insgesamt ins Blut aufgenommen wird.

2 Betrachtet werden die in $\mathbb{R}$ definierten Funktionen $f_q : x \mapsto \sin(q \cdot x)$ mit $q \in \mathbb{R}^+$.

a Geben Sie zwei verschiedene Werte von q an, für die das Dreifache, aber nicht das Vierfache der kleinsten Periode von f_q kleiner als π ist. 3

b Bestimmen Sie den kleinsten Wert von q, für den $f_q(x) = f_q\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt. 2

c Geben Sie für $q = \pi$ zwei Möglichkeiten für die Werte von $a, b \in \mathbb{R}^+$ mit $a \neq b$ an, sodass jeweils $\int_a^b f_q(x)\,dx = 0$ gilt. 2

Die Abbildung 3 zeigt den Graphen der in $\mathbb{R}^+$ definierten Funktion $w : q \mapsto \int_0^{\pi} f_q(x)\,dx$. Zwischen zwei aufeinanderfolgenden Nullstellen von w liegt jeweils genau ein Maximum.

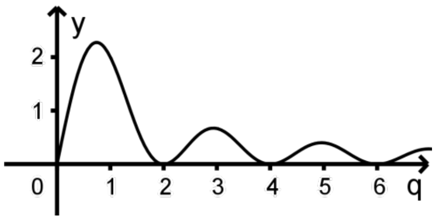


Abb. 3

d Geben Sie die Lösungen der Gleichung $w(q) = \frac{1}{2}$ an. 2

e Begründen Sie, dass die beiden folgenden Aussagen richtig sind: 4

I Zwei beliebige aufeinanderfolgende Nullstellen von w haben den Abstand 2.

II Es gilt $0 \le w(q) \le \frac{2}{q}$.

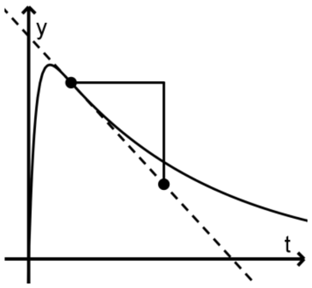
f Begründen Sie, dass die Gleichung $w(q) = r$ für jede positive reelle Zahl r entweder keine Lösung oder endlich viele Lösungen hat. 3

50

2 Erwartungshorizont

Der Erwartungshorizont stellt für jede Teilaufgabe eine mögliche Lösung dar. Nicht dargestellte korrekte Lösungen sind als gleichwertig zu akzeptieren.

			BE
1	a	Erforderlich sind zwei Zeitspannen, in denen die Koffeinkonzentration jeweils halbiert wird, insgesamt also 480 Minuten.	2

	b	$f(0)=c\cdot e^{a\cdot 0}=c$ Für $c>0$ ergibt sich: $f(240)=\frac{1}{2}c \Leftrightarrow a=-\frac{\ln 2}{240}$	3
	c	$\frac{g'(t)}{k-g(t)}=-b$; b ist konstant.	3
	d	Die Aufnahme von Koffein ins Blut führt zu einer Zunahme der Koffeinkonzentration. Die Werte von $g(t)=k-k\cdot e^{b\cdot t}$ nehmen mit wachsenden Werten von t nur dann streng monoton zu, wenn $b<0$ gilt.	2
	e	k gibt den Wert an, dem sich die Koffeinkonzentration nähert, wenn man den Abbauvorgang außer Acht lässt. $\frac{100\text{mg}}{5000\text{ml}}=0{,}02\frac{\text{mg}}{\text{ml}}$, d. h. $k=0{,}02$	3
	f	Verwendet man anstelle der Quadrate der Differenzen die Differenzen selbst, so können sich positive und negative Differenzen teilweise gegenseitig aufheben. Damit könnte die Summe der Differenzen trotz großer Beträge gering sein. Der Term $(g(0)-0)^2+(g(15)-0{,}0127)^2+(g(30)-0{,}0173)^2+(g(45)-0{,}0190)^2$ nimmt sein Minimum für $b\approx-0{,}067$ an.	5
	g	 Die x-Koordinate des Hochpunkts beträgt etwa 46, die y-Koordinate etwa 0,0084. Damit ist die Koffeinkonzentration etwa 46 Minuten nach Beobachtungsbeginn mit etwa $0{,}0084\frac{\text{mg}}{\text{ml}}$ am höchsten. Die x-Koordinate des Wendepunkts beträgt etwa 91, die Koffeinkonzentration nimmt also etwa 91 Minuten nach Beobachtungsbeginn am stärksten ab.	5
	h	Für $t>0$ hat die Gleichung $h''(t)=0$ neben $t\approx 91$ keine weitere Lösung. Da die Koffeinkonzentration etwa 46 Minuten nach Beobachtungsbeginn ein Maximum hat und anschließend abnimmt, ist die Änderungsrate zum Zeitpunkt des Einsetzens des Aufnahmevorgangs maximal. $h'(0)=0{,}0007$, die maximale Änderungsrate beträgt also $0{,}0007\frac{\text{mg}}{\text{ml}\cdot\text{min}}$.	4
	i	$h(t)=0{,}007$ liefert $t_1\approx 19$ und $t_2\approx 119$ Mithilfe des Graphen ergibt sich, dass die Koffeinkonzentration in den ersten etwa 19 Minuten nach Beobachtungsbeginn sowie ab einem Zeitpunkt, der etwa 119 Minuten nach Beobachtungsbeginn liegt, höchstens $0{,}007\frac{\text{mg}}{\text{ml}}$ beträgt.	3
	j	$\int_0^a h(t)\,dt=0{,}7$ liefert $a\approx 96$ Die Aussage ist falsch. Begründung: Eine Flächeneinheit entspricht im Sachzusammenhang $1\frac{\text{mg}}{\text{ml}}\cdot\text{min}$, beschreibt also keine Koffeinmenge.	4
2	a	$q=6{,}1$; $q=7$	3
	b	$f_q(x)=f_q\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$ gilt genau dann, wenn $\frac{\pi}{2}$ ein ganzzahliges Vielfaches der kleinsten Periode von f_q ist. Der kleinste Wert von q, für den dies der Fall ist, ist 4.	2

c	Möglichkeit 1: $a = 0{,}5$; $b = 1{,}5$ Möglichkeit 2: $a = 1$; $b = 3$	2
d	$q \approx 0{,}10$; $q \approx 1{,}57$; $q \approx 2{,}60$; $q \approx 3{,}28$	2
e	I: $w(q) = 0 \Leftrightarrow q = 2n$, $n \in \mathbb{N}$ II: Es gilt $w(q) = \frac{1-\cos(\pi q)}{q}$. Wegen $-1 \leq \cos(\pi q) \leq 1$, gilt $0 \leq 1 - \cos(\pi q) \leq 2$ und damit $0 \leq w(q) \leq \frac{2}{q}$.	4
f	Wegen $w(q) \leq \frac{2}{q}$ gibt es für jede positive reelle Zahl r einen Wert q_0, sodass $w(q) \leq r$ für alle $q > q_0$ gilt. Da zwei aufeinanderfolgende Nullstellen von w jeweils den Abstand 2 haben und dazwischen jeweils genau ein Maximum liegt, haben der Graph von w und die Gerade mit der Gleichung $y = r$ für $q \leq q_0$ entweder keinen gemeinsamen Punkt oder endlich viele gemeinsame Punkte.	3
		50

3 Standardbezug

Teilaufgabe	BE	allgemeine mathematische Kompetenzen						Anforderungsbereich		
		K1	K2	K3	K4	K5	K6	I	II	III
1 a	2		I			I		X		
b	3		I	I		I		X		
c	3	II	II			II			X	
d	2	II		II			II		X	
e	3			II		I	II		X	
f	5	III				II	III			X
g	5	I		I	I			X		
h	4	II		I		II			X	
i	3			I		II			X	
j	4	III		III	II					X
2 a	3	II	II			II			X	
b	2	II	II			II			X	
c	2	II			I	II			X	
d	2					I		X		
e	4	III	II			II				X
f	3	III			II		III			X

4 Bewertungshinweise

Die Bewertung der erbrachten Prüfungsleistungen hat sich für jede Teilaufgabe nach der am rechten Rand der Aufgabenstellung angegebenen Anzahl maximal erreichbarer Bewertungseinheiten (BE) zu richten.

Für die Bewertung der Gesamtleistung eines Prüflings ist ein Bewertungsraster[2] vorgesehen, das angibt, wie die in den Prüfungsteilen A und B insgesamt erreichten Bewertungseinheiten in Notenpunkte umgesetzt werden.

[2] Das Bewertungsraster ist Teil des Dokuments „Beschreibung der Struktur“, das auf den Internetseiten des IQB zum Download bereitsteht.