

Gemeinsame Abituraufgabenpools der Länder

## Pool für das Jahr 2019

Aufgaben für das Fach Mathematik

### Kurzbeschreibung

Anforderungsniveau	Prüfungsteil	Sachgebiet <sup>1</sup>	digitales Hilfsmittel
erhöht	B	AG/LA (A2)	WTR

### 1 Aufgabe

Die Abbildung 1 stellt einen bearbeiteten Edelstein dar. Im verwendeten kartesischen Koordinatensystem, in dem eine Längeneinheit einem Millimeter in der Wirklichkeit entspricht, sind die Quadrate ABCD und EFGH mit  $A(4|4|-1)$  und  $E(2|2|0)$  parallel zur  $xy$ -Ebene. Die Mittelpunkte der beiden Quadrate sowie der Punkt  $S(0|0|-5)$  liegen auf der  $z$ -Achse.

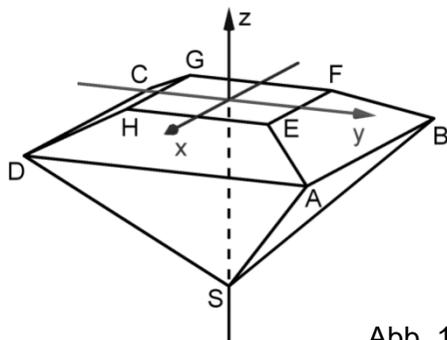


Abb. 1

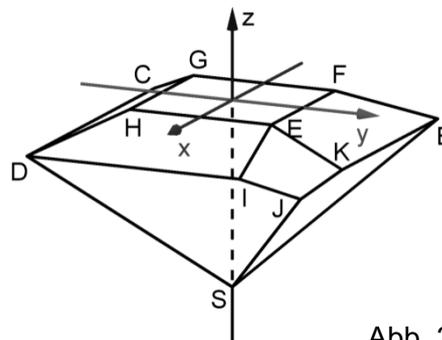


Abb. 2

Die Abbildung 2 stellt den Edelstein nach einem zusätzlichen Bearbeitungsschritt dar, bei dem ein pyramidenförmiges Stück abgeschliffen wurde. Das Viereck EIJK mit  $I(4|2|-1)$  und  $K(2|4|-1)$  ist ein Drachenviereck und liegt in der Ebene W.

BE

<sup>1</sup> verwendete Abkürzungen: AG/LA (A1) - Analytische Geometrie/Lineare Algebra (Alternative A1),  
AG/LA (A2) - Analytische Geometrie/Lineare Algebra (Alternative A2)

- 1 a Die Gerade  $u: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  mit  $r \in \mathbb{R}$  verläuft durch A. Zeigen Sie, dass u auch durch S verläuft. 1
- b Ermitteln Sie eine Gleichung der Ebene W in Koordinatenform. 4
- (zur Kontrolle:  $W: x + y + 2z - 4 = 0$ )*
- c Berechnen Sie die Koordinaten von J. 3
- (zur Kontrolle:  $J(3,5 | 3,5 | -1,5)$ )*
- d Berechnen Sie das Volumen des Teils des Edelsteins, der durch den zusätzlichen Bearbeitungsschritt verloren ging. 6
- e In weiteren Bearbeitungsschritten werden auch an den Eckpunkten des Edelsteins, die durch B, C und D dargestellt sind, pyramidenförmige Stücke gleicher Form und Größe abgeschliffen. Anschließend ist der Edelstein symmetrisch bezüglich der Achse, die im Modell durch die z-Achse beschrieben wird. Beurteilen Sie, ob die folgende Aussage richtig ist: 3

*Eine der drei Flächen, die durch die weiteren Bearbeitungsschritte entstanden sind, liegt im Modell in der Ebene mit der Gleichung*

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ mit } r, s \in \mathbb{R}.$$

- 2 Ein Laserstrahl, der auf den Edelstein trifft, kann im Modell mithilfe einer Gerade beschrieben werden, seine Richtung durch den Vektor  $\overline{LM} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -t \end{pmatrix}$  mit  $t > 0$ . Der Auftreffpunkt wird durch  $M(0 | 0 | 0)$  dargestellt.

Beim Übergang in den Edelstein ändert der Laserstrahl seine Richtung. Die Abbildung 3 zeigt in der yz-Ebene schematisch den Verlauf des Strahls. Es gilt  $\sin \alpha = 2 \sin \beta$ .

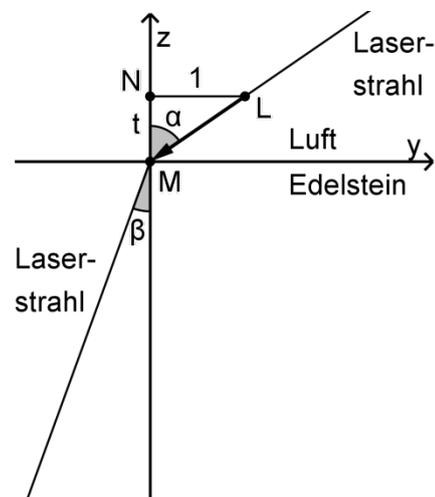


Abb. 3

- a Bestimmen Sie für  $\alpha = 45^\circ$  ohne zu rechnen den zugehörigen Wert von t. 2
- b Zeigen Sie, dass  $\sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$  gilt. 2
- c Ermitteln Sie einen Vektor, der die Richtung des Laserstrahls im Edelstein in Abhängigkeit von t beschreibt. Veranschaulichen Sie Ihr Vorgehen in der Abbildung 3. 4

## 2 Erwartungshorizont

Der Erwartungshorizont stellt für jede Teilaufgabe eine mögliche Lösung dar. Nicht dargestellte korrekte Lösungen sind als gleichwertig zu akzeptieren.

		BE	
1	a	$\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} - 4 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix}$	1
	b	$\vec{EI} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \vec{EK} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ und } \vec{n} \circ \vec{EK} = \vec{n} \circ \vec{EI} = 0 \text{ liefern } \vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ als Normalenvektor}$ <p>von W. Damit hat die Gleichung von W die Form <math>x + y + 2z + d = 0</math>. Mit <math>E \in W</math> ergibt sich <math>d = -4</math>.</p>	4
	c	$4 + r + 4 + r + 2 \cdot (-1 + r) - 4 = 0 \Leftrightarrow 4r = -2 \Leftrightarrow r = -\frac{1}{2}$ $\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3,5 \\ 3,5 \\ -1,5 \end{pmatrix}, \text{ d. h. } J(3,5   3,5   -1,5)$	3
	d	<p>Flächeninhalt des Drachenvierecks EIJK: <math>\frac{1}{2} \cdot  \vec{IK}  \cdot  \vec{EJ}  = \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1,5 \\ 1,5 \\ -1,5 \end{vmatrix} = \frac{3}{2} \sqrt{6}</math></p> <p>Abstand von A zu W: <math>\frac{ 4+4-2-4 }{\sqrt{6}} = \frac{2}{\sqrt{6}}</math></p> <p>Volumen der Pyramide EIJKA: <math>\frac{1}{3} \cdot \frac{3}{2} \sqrt{6} \cdot \frac{2}{\sqrt{6}} = 1</math></p> <p>Damit geht <math>1 \text{ mm}^3</math> des Edelsteins verloren.</p>	6
	e	<p>Die Aussage ist richtig.</p> <p>Begründung: <math>\begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}</math> ist der Ortsvektor des Punkts G. Die Ebene, in der das zugehörige Drachenviereck liegt, steht aufgrund der Symmetrie des Körpers senkrecht zum Vektor <math>\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}</math>. Dieser steht wegen <math>\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0</math> senkrecht zu den in der Gleichung auftretenden Richtungsvektoren.</p>	3
2	a	Für $\alpha = 45^\circ$ ist das rechtwinklige Dreieck MLN gleichschenkelig. Damit gilt $t = 1$ .	2
	b	$\sin \alpha = \frac{1}{ML} = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$	2

**c**

Der gesuchte Vektor hat die Form  $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -\overline{MQ} \end{pmatrix}$ .

Es gilt:  $\sin\beta = \frac{1}{2} \sin\alpha = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{1+t^2}}$

Damit:  $\overline{MQ} = \sqrt{\left(2 \cdot \sqrt{1+t^2}\right)^2 - 1}$

4

---

25

### 3 Standardbezug

Teilaufgabe	BE	allgemeine mathematische Kompetenzen						Anforderungsbereich		
		K1	K2	K3	K4	K5	K6	I	II	III
1 a	1					I		X		
b	4		I			II			X	
c	3		I			II	II		X	
d	6		II	I		II			X	
e	3	II	III		II					X
2 a	2	I			I		I	X		
b	2				I	I		X		
c	4		III		II	II				X

### 4 Bewertungshinweise

Die Bewertung der erbrachten Prüfungsleistungen hat sich für jede Teilaufgabe nach der am rechten Rand der Aufgabenstellung angegebenen Anzahl maximal erreichbarer Bewertungseinheiten (BE) zu richten.

Für die Bewertung der Gesamtleistung eines Prüflings ist ein Bewertungsraster<sup>2</sup> vorgesehen, das angibt, wie die in den Prüfungsteilen A und B insgesamt erreichten Bewertungseinheiten in Notenpunkte umgesetzt werden.

<sup>2</sup> Das Bewertungsraster ist Teil des Dokuments „Beschreibung der Struktur“, das auf den Internetseiten des IQB zum Download bereitsteht.