

Gemeinsame Abituraufgabenpools der Länder

Pool für das Jahr 2019

Aufgaben für das Fach Mathematik

Kurzbeschreibung

Anforderungsniveau	Prüfungsteil	Sachgebiet ¹	digitales Hilfsmittel
erhöht	B	AG/LA (A2)	CAS

1 Aufgabe

Ein Logistikunternehmen testet auf einer Strecke zwischen Festland und einer Insel die Paketzustellung mithilfe eines Flugkörpers, einer sogenannten Drohne. In einem kartesischen Koordinatensystem wird das horizontale Gelände, über dem sich die Drohne bewegt, modellhaft durch die x_1x_2 -Ebene dargestellt, die Lage des Startplatzes durch den Punkt $S(7320 | -1750 | 0)$ und die Lage des regulären Landeplatzes durch den Punkt $L(-990 | 6990 | 0)$. Eine Längeneinheit im Koordinatensystem entspricht einem Meter in der Realität.

Die Drohne soll über dem Startplatz zunächst vertikal aufsteigen, bis sie eine Höhe von 50 m erreicht hat, und anschließend geradlinig in konstanter Höhe und mit konstanter Geschwindigkeit in die Richtung des Landeplatzes fliegen.

a Begründen Sie, dass die vorgesehene horizontale Flugbahn der Drohne im Modell

entlang der Gerade $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 7320 \\ -1750 \\ 50 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -8310 \\ 8740 \\ 0 \end{pmatrix}$ mit $r \in \mathbb{R}$ verläuft.

100 Sekunden nachdem die Drohne die Höhe von 50 m erreicht hat, wird ihre Position durch den Punkt $P(6489 | -876 | 50)$ dargestellt.

b Zeigen Sie, dass sich die Drohne auf der vorgesehenen Flugbahn befindet. Bestimmen Sie die Koordinaten des Punkts, der die Position der Drohne nach weiteren 200 Sekunden Flugzeit auf der vorgesehenen Flugbahn darstellt.

BE

2

3

¹ verwendete Abkürzungen: AG/LA (A1) - Analytische Geometrie/Lineare Algebra (Alternative A1),
AG/LA (A2) - Analytische Geometrie/Lineare Algebra (Alternative A2)

c Bestimmen Sie die Geschwindigkeit der Drohne während des horizontalen Flugs. 2

Die Drohne soll ihren Weg zum Landeplatz selbstständig zurücklegen können. Während der Testphase wird ihr Flug jedoch von einer Bodenstation aus überwacht und die Flugbahn bei Bedarf korrigiert. Die Position der Bodenstation wird durch den Punkt $B(0|0|0)$ dargestellt, ihre Reichweite beträgt 6000 m.

d Weisen Sie nach, dass sich die Drohne auf dem horizontalen Teil der vorgesehenen Flugbahn über eine Strecke von mehr als 8,5 km innerhalb der Reichweite der Bodenstation befindet. 5

Einer Korrektur der Bodenstation folgend weicht die Drohne im Modell im Punkt $Q(3996|1746|50)$ von der vorgesehenen Flugbahn ab und bewegt sich mit einer Geschwindigkeit von $5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ geradlinig auf einen Ausweichlandeplatz zu, der durch den Punkt $A(4050|1810|0)$ dargestellt wird.

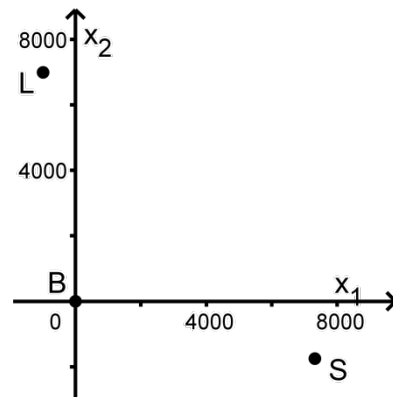
e Bestimmen Sie die Größe des Neigungswinkels der Flugbahn gegenüber dem Gelände beim Anflug auf den Ausweichlandeplatz. 3

f Berechnen Sie, um wie viele Meter sich die Flughöhe pro Sekunde verringert. 3

Nach der Landung auf dem Ausweichplatz steuert die Drohne eine Position an, die sich in einer Höhe von 50 m befindet und vom Startplatz, vom regulären Landeplatz und von der Bodenstation gleich weit entfernt ist. Diese Position wird durch den Punkt R beschrieben.

g Die Ebene E enthält alle Punkte, die von S und L den gleichen Abstand haben. Bestimmen Sie eine Gleichung von E in Koordinatenform. 3

h Stellen Sie die Ebene E in der Abbildung dar. Beschreiben Sie ein Verfahren, mit dem unter Verwendung der Abbildung die Koordinaten von R ermittelt werden könnten. Veranschaulichen Sie das Verfahren in der Abbildung. 4

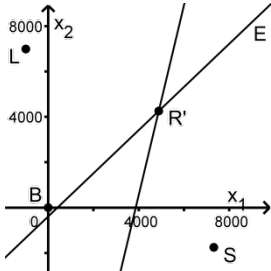


25

2 Erwartungshorizont

Der Erwartungshorizont stellt für jede Teilaufgabe eine mögliche Lösung dar. Nicht dargestellte korrekte Lösungen sind als gleichwertig zu akzeptieren.

	BE
a Der Punkt $(7320 -1750 50)$ stellt die Position der Drohne 50 m vertikal über dem Startplatz dar.	2

$\overline{SL} = \begin{pmatrix} -8310 \\ 8740 \\ 0 \end{pmatrix}$	
<p>b $\begin{pmatrix} 7320 \\ -1750 \\ 50 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -8310 \\ 8740 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6489 \\ -876 \\ 50 \end{pmatrix} \Leftrightarrow r = 0,1$</p> <p>$\begin{pmatrix} 7320 \\ -1750 \\ 50 \end{pmatrix} + 0,3 \cdot \begin{pmatrix} -8310 \\ 8740 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4827 \\ 872 \\ 50 \end{pmatrix}$, d. h. der Punkt hat die Koordinaten $(4827 872 50)$.</p>	3
<p>c $\frac{1}{100} \cdot \left(\begin{pmatrix} 6489 \\ -876 \\ 50 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 7320 \\ -1750 \\ 50 \end{pmatrix} \right) \approx 12$, d. h. die Geschwindigkeit beträgt etwa $12 \frac{m}{s}$.</p>	2
<p>d $\left \begin{pmatrix} 7320 \\ -1750 \\ 50 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -8310 \\ 8740 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right \leq 6000$ liefert, dass der Wert von r zwischen etwa $0,1601$ und etwa $0,8867$ liegen kann. Die zugehörige Strecke auf g hat eine Länge von etwa 8760, ist also länger als 8500.</p>	5
<p>e Mit $\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ liefert $\sin \varphi = \frac{ \overrightarrow{QA} \circ \vec{n} }{ \overrightarrow{QA} \cdot \vec{n} }$: $\varphi \approx -31^\circ$</p> <p>Die Größe des Neigungswinkels beträgt etwa 31°.</p>	3
<p>f $\frac{50}{ \overrightarrow{QA} } \cdot 5 \frac{m}{s} \approx 2,6 \frac{m}{s}$, d. h. die Flughöhe verringert sich pro Sekunde um etwa $2,6$ Meter.</p>	3
<p>g Die Gleichung von E hat die Form $-8310x_1 + 8740x_2 = c$. Der Mittelpunkt $(3165 2620 0)$ von S und L liegt genau dann in E, wenn $c = -3402350$ gilt.</p>	3
<p>h</p>  <p>Der Punkt, der sich ergibt, wenn man R parallel zur x_3-Achse in die x_1x_2-Ebene verschiebt, wird mit R' bezeichnet. Da R den gleichen Abstand von S und B hat, liegt R' auf der Mittelsenkrechten von S und B. Der Schnittpunkt dieser Mittelsenkrechten und der Gerade, die E darstellt, liefert die x_1- und x_2-Koordinate von R, die x_3-Koordinate ist 50.</p>	4
	25

3 Standardbezug

Teilaufgabe	BE	allgemeine mathematische Kompetenzen						Anforderungsbereich		
		K1	K2	K3	K4	K5	K6	I	II	III
a	2	I		I			I	X		
b	3		I	I		I		X		
c	2		II	II		I			X	
d	5		II	II		II			X	
e	3			I		II	I		X	
f	3		III	III		II				X
g	3	I	II			II			X	
h	4	III			II		III			X

4 Bewertungshinweise

Die Bewertung der erbrachten Prüfungsleistungen hat sich für jede Teilaufgabe nach der am rechten Rand der Aufgabenstellung angegebenen Anzahl maximal erreichbarer Bewertungseinheiten (BE) zu richten.

Für die Bewertung der Gesamtleistung eines Prüflings ist ein Bewertungsraster² vorgesehen, das angibt, wie die in den Prüfungsteilen A und B insgesamt erreichten Bewertungseinheiten in Notenpunkte umgesetzt werden.

² Das Bewertungsraster ist Teil des Dokuments „Beschreibung der Struktur“, das auf den Internetseiten des IQB zum Download bereitsteht.