

Gemeinsame Abituraufgabenpools der Länder

Pool für das Jahr 2019

Aufgaben für das Fach Mathematik

Kurzbeschreibung

Anforderungsniveau	Prüfungsteil	Sachgebiet ¹	digitales Hilfsmittel
erhöht	B	AG/LA (A1)	CAS

1 Aufgabe

Bei Insekten der Arten α und β sind jeweils drei Lebensstadien zu unterscheiden: aus einem Ei entwickelt sich über ein Larvenstadium ein ausgewachsenes Insekt. Für jede der beiden Arten lässt sich die Entwicklung einer Population von einer Woche n zur nächsten modellhaft durch eine Gleichung beschreiben:

◆ Art α : $\vec{v}_{n+1} = A \cdot \vec{v}_n$ mit $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 50 \\ 0,1 & 0 & 0 \\ 0 & 0,2 & 0,5 \end{pmatrix}$

◆ Art β : $\vec{w}_{n+1} = B \cdot \vec{w}_n$ mit $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 20 \\ 0,15 & 0 & 0 \\ 0 & 0,3 & 0,1 \end{pmatrix}$

Dabei haben die Vektoren \vec{v}_n und \vec{w}_n jeweils die Form $\begin{pmatrix} E \\ L \\ I \end{pmatrix}$, wobei E die Anzahl der

Eier, L die Anzahl der Larven und I die Anzahl der ausgewachsenen Insekten angibt.

a Stellen Sie die Entwicklung einer Population der Art β in einem Übergangendiagramm dar.

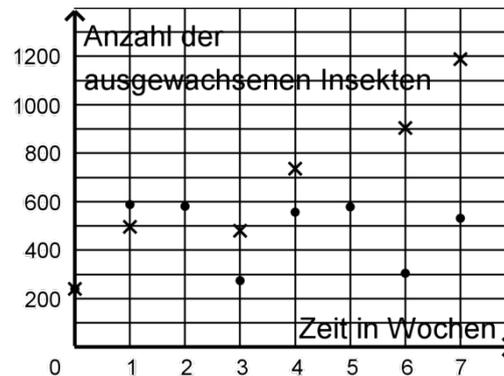
BE

2

¹ verwendete Abkürzungen: AG/LA (A1) - Analytische Geometrie/Lineare Algebra (Alternative A1),
AG/LA (A2) - Analytische Geometrie/Lineare Algebra (Alternative A2)

In einem ersten Raum befindet sich eine Population der Art α , in einem zweiten eine Population der Art β . Jede der beiden Populationen setzt sich zu Beobachtungsbeginn aus 11600 Eiern, 1880 Larven und 240 ausgewachsenen Insekten zusammen.

- b** Der Abbildung kann für jede der beiden Arten für bestimmte Zeitpunkte nach Beobachtungsbeginn jeweils die Anzahl der ausgewachsenen Insekten entnommen werden. Dabei werden die Anzahlen für die Art α durch Kreuze und für die Art β durch Punkte dargestellt. Ergänzen Sie die zwei fehlenden Kreuze.



- c** Interpretieren Sie die folgenden richtigen Aussagen jeweils im Sachzusammenhang:

- ◆ Zu B existiert eine Grenzmatrix B_G .
- ◆ Alle Einträge der Matrizen A^n werden mit wachsendem Wert von n beliebig groß.

d Es gilt $B_G = \begin{pmatrix} \frac{9}{28} & \frac{15}{7} & \frac{50}{7} \\ \frac{27}{560} & \frac{9}{28} & x \\ \frac{9}{560} & \frac{3}{28} & \frac{5}{14} \end{pmatrix}$. Ermitteln Sie den Wert von x .

Die Vektoren, die die Zusammensetzungen von Populationen der beschriebenen Insektenarten darstellen, lassen sich auch geometrisch auffassen.

- e** Berechnen Sie die Größe des Winkels zwischen den beiden Vektoren, die die Zusammensetzungen der Populationen im ersten und zweiten Raum drei Wochen nach Beobachtungsbeginn darstellen.

- f** Beurteilen Sie jede der beiden folgenden Aussagen:

- ◆ Wenn zwei Vektoren \vec{v}_n und \vec{w}_n , deren Komponenten ungleich null sind, einen Winkel der Größe 0° einschließen, dann stimmen die Verhältnisse der Anzahlen der Eier, Larven und ausgewachsenen Insekten in den beiden Populationen überein.
- ◆ Je größer der Betrag eines Vektors \vec{v}_n oder \vec{w}_n ist, desto größer ist die Summe der Anzahlen der Eier, Larven und ausgewachsenen Insekten in der Population.

In einem dritten Raum befindet sich eine Population der Art α . Um eine Methode zu finden, deren starkes Wachstum einzuschränken, werden im Modell unabhängig voneinander zwei verschiedene Eingriffe in die Entwicklung einer Population der Art α betrachtet.

- g** Der erste Eingriff besteht darin, die Überlebensrate der ausgewachsenen Insekten zu verändern. Untersuchen Sie, ob dadurch die Gesamtzahl der Eier, Larven und ausgewachsenen Insekten nach oben beschränkt werden kann.

Nach dem zweiten Eingriff ließe sich die Entwicklung der Population im Modell mithilfe

einer Matrix der Form $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 50 \\ t & 0 & 0 \\ 0 & 0,2 & 0,5 \end{pmatrix}$ mit $0 \leq t < 0,1$ beschreiben.

h Interpretieren Sie die Wirkung des zweiten Eingriffs im Sachzusammenhang.

2

i Es gibt einen Wert von t , für den sich bestimmte Zusammensetzungen der Population – mit mindestens einem ausgewachsenen Insekt – von einer Woche zur nächsten nicht verändern. Ermitteln Sie diese Zusammensetzungen und den zugehörigen Wert von t .

3

25

2 Erwartungshorizont

Der Erwartungshorizont stellt für jede Teilaufgabe eine mögliche Lösung dar. Nicht dargestellte korrekte Lösungen sind als gleichwertig zu akzeptieren.

	BE
<p>a</p>	2
<p>b</p>	3
<p>c</p> <ul style="list-style-type: none"> ◆ In einer Population der Art β nähern sich die Anzahlen von Eiern, Larven und ausgewachsenen Insekten im Laufe der Zeit jeweils einem festen Wert. ◆ In einer Population der Art α können die Anzahlen von Eiern, Larven und ausgewachsenen Insekten im Laufe der Zeit jeweils beliebig groß werden. 	3
<p>d $B \cdot B_G = B_G \Leftrightarrow 0,15 \cdot \frac{50}{7} = x \Leftrightarrow x = \frac{15}{14}$</p>	2
<p>e</p> $\cos \varphi = \frac{\begin{pmatrix} A^3 \cdot \begin{pmatrix} 11600 \\ 1880 \\ 240 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} B^3 \cdot \begin{pmatrix} 11600 \\ 1880 \\ 240 \end{pmatrix} \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} A^3 \cdot \begin{pmatrix} 11600 \\ 1880 \\ 240 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} B^3 \cdot \begin{pmatrix} 11600 \\ 1880 \\ 240 \end{pmatrix} \end{pmatrix}}$ liefert $\varphi \approx 2,7^\circ$	3
<p>f ◆ Die Aussage ist richtig. Begründung: Schließen zwei Vektoren \vec{v}_n und \vec{w}_n einen Winkel der Größe 0° ein, so sind sie kollinear, d. h. der eine Vektor ist ein Vielfaches des anderen.</p>	4

	<p>♦ Die Aussage ist falsch.</p> <p>Begründung: Beispielsweise gilt $\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} = \sqrt{48} < 10 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix}$, aber $4 + 4 + 4 > 10$.</p>	
g	<p>Senkt man die Überlebensrate der ausgewachsenen Insekten auf 0, so ergibt sich:</p> $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 50 \\ 0,1 & 0 & 0 \\ 0 & 0,2 & 0 \end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ <p>Damit wiederholt sich die Zusammensetzung der Population alle drei Wochen. Durch den Eingriff kann die Gesamtzahl der Eier, Larven und ausgewachsenen Insekten also nach oben beschränkt werden.</p>	3
h	<p>Der zweite Eingriff verringert den Anteil der Eier, die in das Larvenstadium übergehen.</p>	2
i	<p>Die Gleichung $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 50 \\ t & 0 & 0 \\ 0 & 0,2 & 0,5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} E \\ L \\ I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E \\ L \\ I \end{pmatrix}$ liefert für $\begin{pmatrix} E \\ L \\ I \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$: Die Zusammensetzungen werden durch $k \cdot \begin{pmatrix} 100 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$ mit $k \in \mathbb{N}$ dargestellt, der zugehörige Wert von t ist 0,05.</p>	3
		25

3 Standardbezug

Teilaufgabe	BE	allgemeine mathematische Kompetenzen						Anforderungsbereich		
		K1	K2	K3	K4	K5	K6	I	II	III
a	2			I	I		I	X		
b	3			I	I	I		X		
c	3	II		II			II		X	
d	2		II			I			X	
e	3		I			II			X	
f	4	III				I	II			X
g	3		III	III		II				X
h	2	I		II	II				X	
i	3		I	II		II			X	

4 Bewertungshinweise

Die Bewertung der erbrachten Prüfungsleistungen hat sich für jede Teilaufgabe nach der am rechten Rand der Aufgabenstellung angegebenen Anzahl maximal erreichbarer Bewertungseinheiten (BE) zu richten.

Für die Bewertung der Gesamtleistung eines Prüflings ist ein Bewertungsraster² vorgesehen, das angibt, wie die in den Prüfungsteilen A und B insgesamt erreichten Bewertungseinheiten in Notenpunkte umgesetzt werden.

² Das Bewertungsraster ist Teil des Dokuments „Beschreibung der Struktur“, das auf den Internetseiten des IQB zum Download bereitsteht.