

Gemeinsame Abituraufgabenpools der Länder

Pool für das Jahr 2018

Aufgaben für das Fach Mathematik

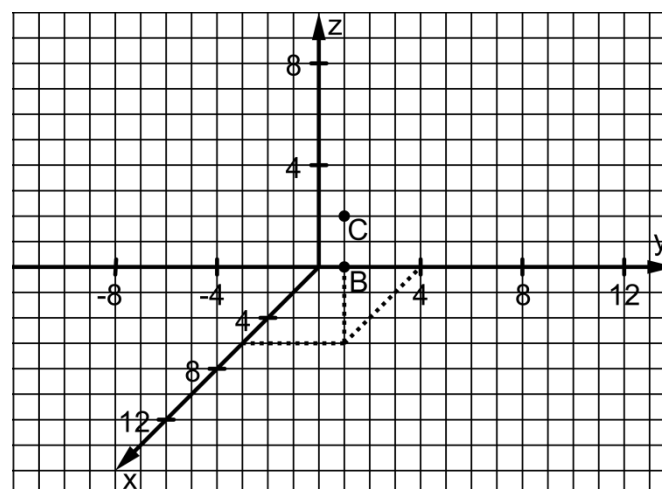
Kurzbeschreibung

Anforderungsniveau	Prüfungsteil	Sachgebiet ¹	digitales Hilfsmittel
grundlegend	B	AG/LA (A2)	CAS

1 Aufgabe

Vor einer Hauswand ist ein rechteckiges Reklameschild angebracht, das durch einen Scheinwerfer beleuchtet wird. Der Scheinwerfer lässt sich in einem kartesischen Koordinatensystem modellhaft durch den Punkt $L(12 | -4 | 3)$ beschreiben. Die Eckpunkte des Schilds werden durch die Punkte $A(4 | 0 | 3)$, $B(6 | 4 | 3)$, $C(6 | 4 | 5)$ und $D(4 | 0 | 5)$ dargestellt. Die xy -Ebene beschreibt den horizontalen Untergrund, auf dem das Haus steht, die yz -Ebene die Ebene, in der die Hauswand liegt. Eine Längeneinheit im Koordinatensystem entspricht einem Meter in der Realität.

a Zeichnen Sie das Rechteck ABCD sowie den Punkt L in die Abbildung ein.



BE

2

¹ verwendete Abkürzungen: AG/LA (A1) - Analytische Geometrie/Lineare Algebra (Alternative A1),
AG/LA (A2) - Analytische Geometrie/Lineare Algebra (Alternative A2)

Auf der Hauswand ist der Schatten des Schilds sichtbar. Der Punkt $A'(0|2|3)$ stellt den zu A gehörenden Eckpunkt des Schattens dar, die Punkte $C'(0|12|7)$ und $D'(0|2|6)$ die zu C bzw. D gehörenden Eckpunkte.

- b** Weisen Sie nach, dass der vierte Eckpunkt des Schattens durch $B'(0|12|3)$ dargestellt wird. 2
- c** Ergänzen Sie das zum Schatten gehörende Viereck in Ihrer Zeichnung zu Teilaufgabe a und begründen Sie, dass die untere Kante des Schattens horizontal verläuft. 2
- d** Berechnen Sie den Flächeninhalt des Schattens. 3
- e** Berechnen Sie die Größe des größten Innenwinkels des Schattens. 3

Der Scheinwerfer kann entlang einer vertikal verlaufenden Stange in der Höhe verschoben werden; dabei liegt der Schatten des Schilds stets vollständig auf der Hauswand. Für jede der beiden Kanten des Schattens, die durch die linke und rechte Kante des Schilds erzeugt werden, gelten folgende Aussagen:

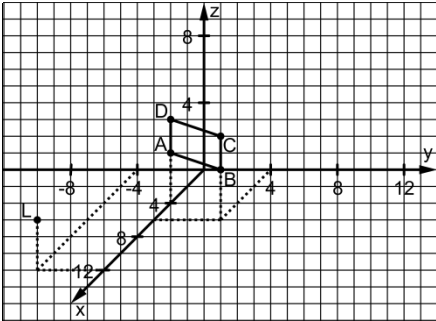
- I Die Kante verläuft für alle Positionen des Scheinwerfers entlang derselben vertikalen Gerade.
- II Die Länge der Kante bleibt bei Verschiebung des Scheinwerfers unverändert.

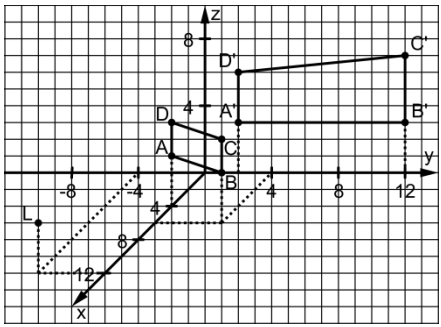
- f** Weisen Sie die Gültigkeit der Aussage II für eine der beiden betrachteten Kanten des Schattens rechnerisch nach. 5
- g** Begründen Sie, dass sich der Flächeninhalt des Schattens bei Verschiebung des Scheinwerfers nicht verändert. 3

20

2 Erwartungshorizont

Der Erwartungshorizont stellt für jede Teilaufgabe dar, in welchem Umfang und in welcher Form eine Lösung erwartet wird; nicht alle Lösungen sind dazu vollständig ausgeführt. Nicht dargestellte korrekte Lösungen sind als gleichwertig zu akzeptieren.

		BE
a		2

b	Da B' die x-Koordinate 0 hat, liegt der Punkt in der yz-Ebene. Zudem sind $\overrightarrow{LB'} = \begin{pmatrix} -12 \\ 16 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{LB} = \begin{pmatrix} -6 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix}$ kollinear.	2
c	 Begründung: Die Punkte A' und B' haben die gleiche z-Koordinate.	2
d	$\frac{1}{2} \cdot (\overrightarrow{A'D'} + \overrightarrow{B'C'}) \cdot \overrightarrow{A'B'} = \frac{1}{2} \cdot (3 + 4) \cdot 10 = 35$ Der Flächeninhalt des Schattens beträgt 35m^2 .	3
e	$\overrightarrow{D'A'} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}, \overrightarrow{D'C'} = \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\cos \varphi = \frac{\overrightarrow{D'A'} \cdot \overrightarrow{D'C'}}{ \overrightarrow{D'A'} \cdot \overrightarrow{D'C'} } = \frac{-3}{3\sqrt{101}}, \text{ d. h. } \varphi \approx 96^\circ$	3
f	Punkt, der den Scheinwerfer beschreibt: $L_h(12 -4 h)$ Punkte, die die Endpunkte einer der beiden betrachteten Kanten darstellen: $A'_h(0 2 z_{A'})$, $D'_h(0 2 z_{D'})$ $\begin{pmatrix} 12 \\ -4 \\ h \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -8 \\ 4 \\ 3-h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ z_{A'} \end{pmatrix}$ liefert: $z_{A'} = 4,5 - 0,5h$ $\begin{pmatrix} 12 \\ -4 \\ h \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -8 \\ 4 \\ 5-h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ z_{D'} \end{pmatrix}$ liefert: $z_{D'} = 7,5 - 0,5h$ Damit: $\overline{A'_h D'_h} = 3$	5
g	Die beiden Kanten des Schattens, die durch die linke und rechte Kante des Schilds erzeugt werden, sind unabhängig von der Position des Scheinwerfers parallel zueinander. Bei Verschiebung des Scheinwerfers verändern sich weder ihre Längen noch ihr Abstand.	3
		20

3 Standardbezug

Teilaufgabe	BE	allgemeine mathematische Kompetenzen ²						Anforderungsbereich		
		K1	K2	K3	K4	K5	K6	I	II	III
a	2				I			X		
b	2		II	II		II			X	
c	2	I		I	I			X		
d	3			I	I	I		X		
e	3				I	II			X	
f	5	III	III			II				X
g	3	II	II				II		X	

4 Bewertungshinweise

Die Bewertung der erbrachten Prüfungsleistungen hat sich für jede Teilaufgabe nach der am rechten Rand der Aufgabenstellung angegebenen Anzahl maximal erreichbarer Bewertungseinheiten (BE) zu richten.

Für die Bewertung der Gesamtleistung eines Prüflings ist ein Bewertungsraster³ vorgesehen, das angibt, wie die in den Prüfungsteilen A und B insgesamt erreichten Bewertungseinheiten in Notenpunkte umgesetzt werden.

² Für jede Kompetenz, die bei der Bearbeitung der Teilaufgabe eine wesentliche Rolle spielt, ist der Anforderungsbereich (I, II oder III) eingetragen, in dem die Kompetenz benötigt wird.

³ Das Bewertungsraster ist Teil des Dokuments „Beschreibung der Struktur“, das auf den Internetseiten des IQB zum Download bereitsteht.